



Scenariusze lekcji

z zakresu rynku finansowego z zadaniami matematycznymi i zbiór zadań z odpowiedziami dla szkół ponadgimnazjalnych

Materiały edukacyjne dla środowiska szkolnego



MATERIAŁY EDUKACYJNE
DLA ŚRODOWISKA SZKOLNEGO

Praca zbiorowa

SCENARIUSZE LEKCJI Z ZAKRESU RYNKU FINANSOWEGO z zadaniami matematycznymi i zbior zadań z odpowiedziami dla szkół ponadgimnazjalnych

Warszawa 2015



Publikacja została wydana nakładem Komisji Nadzoru Finansowego

© Komisja Nadzoru Finansowego
Pl. Powstańców Warszawy 1
00-030 Warszawa
www.knf.gov.pl

Warszawa 2015
Wydanie I

ISBN 978-83-63380-77-9

Nakład: 3000 szt.

Przygotowanie do druku i druk:
Omikron sp. z o.o.
www.omikron.net.pl

Niniejsza publikacja wydana została w celach edukacyjnych w ramach projektu CEDUR. Informacje w niej zawarte mają wyłącznie charakter ogólny i nie stanowią porady inwestycyjnej.

Urząd Komisji Nadzoru Finansowego nie ponosi odpowiedzialności za wszelkie decyzje inwestycyjne, podjęte przez czytelnika na podstawie zawartych w niniejszej publikacji informacji.

SPIS TREŚCI

PRZEDMOWA	5
PODSTAWY ANALIZY SPRAWOZDAŃ FINANSOWYCH ORAZ ANALIZA WSKAŹNIKÓW GIEŁDOWYCH	
Jan Duk.....	6
STOPY PROCENTOWE – ZAGADNIENIA PRAKTYCZNE (ZBIÓR ZADAŃ)	
Mateusz Mokrogulski.....	11
PODSTAWY MATEMATYKI FINANSOWEJ – POJĘCIE RENTY MATEMATYCZNEJ	
Piotr Śliwka.....	16
WYZNACZANIE RATY KREDYTU	
Piotr Śliwka.....	21
JAK OCENIĆ KOSZTY ZWIĄZANE Z UMOWAMI UBEZPIECZENIA NA ŻYCIE Z UBEZPIECZENIOWYMI FUNDUSZAMI KAPITAŁOWYMI (UFK)	
Bożenna Zielińska-Kurpiel.....	27
WARTOŚĆ PIENIĄDZA W CZASIE	
Jan Duk, Piotr Śliwka, Bożenna Zielińska-Kurpiel.....	32
KREDYT BANKOWY W PIGUŁCE MATEMATYCZNEJ	
Urszula Wiśniewska.....	43
WYKAZ UCZNIÓW VIII LICEUM OGÓLNOKSZTAŁCĄCEGO IM. WŁADYSŁAWA IV W WARSZAWIE BIORĄCYCH UDZIAŁ W PROJEKCIE EDUKACYJNYM URZĘDU KOMISJI NADZORU FINANSOWEGO	48

PRZEDMOWA

Do oceny przedstawionych zostało 10 scenariuszy lekcji, dotyczących problematyki ekonomicznej, zawierających elementy wiedzy i umiejętności ujęte w programie nauczania matematyki szkoły ponadgimnazjalnej w zakresie rozszerzonym, które zostały zawarte w publikacjach *Scenariusze lekcji z zakresu rynku finansowego z zadaniami matematycznymi i zbiór zadań z odpowiedziami dla szkół ponadgimnazjalnych* oraz *Scenariusze lekcji z zakresu rynku finansowego z zadaniami matematycznymi i logicznymi z odpowiedziami dla szkół gimnazjalnych i ponadgimnazjalnych*.

Założeniem proponowanych zajęć jest nabycie umiejętności praktycznych, które są przydatne, a nawet niezbędne dla każdego uczestnika życia społecznego, aby mógł bez przeszkód realizować swoje cele życiowe i zawodowe, nie ponosząc szkody z powodu nieznanomości podstaw wiedzy ekonomicznej. Praktyczne ćwiczenia pokazują uczniom, jak wykorzystywane są znane im metody i wzory matematyczne do analizy zjawisk ekonomicznych.

Scenariusze obejmują swym zakresem zagadnienia z zakresu ekonomii, z którymi każdy człowiek niewątpliwie spotka się w dorosłym życiu. Trudna problematyka ekonomiczna została w nich jednak zaprezentowana w sposób przystępny i niewymagający od uczniów specjalistycznego przygotowania merytorycznego z zakresu ekonomii. Wysoki poziom merytoryczny scenariuszy, właściwy dobór tematów, zadań i ćwiczeń, jasny i przejrzysty język przekazu, atrakcyjne formy i metody pracy z uczniami, a przede wszystkim świadomość możliwości praktycznego zastosowania zdobytej wiedzy sprawiają, że scenariusze stają się atrakcyjną „odskocznia” od tradycyjnych, teoretycznych zagadnień, podejmowanych na lekcjach matematyki.

Trudno sobie wyobrazić, abyśmy w XXI w. mogli funkcjonować bez pieniędzy, przelewów, kart czy kredytów, dlatego można stwierdzić, że scenariusze poruszają tematy bardzo bliskie współczesnemu człowiekowi, jak również pomagają młodzieży wkroczyć w świat dorosłości jako świadomym klientom, konsumentom, a w przyszłości być może także skutecznym przedsiębiorcom. Przedstawione scenariusze mogą być realizowane na zajęciach dodatkowych w szkołach ponadgimnazjalnych. Są doskonałym materiałem dydaktycznym dla nauczycieli prowadzących koła przedmiotowe z matematyki, przedsiębiorczości lub przygotowujących uczniów do olimpiady ekonomicznej.

Udział uczniów naszej szkoły w projekcie realizowanym przez Urząd Komisji Nadzoru Finansowego przyczynił się do wzrostu ich poziomu wiedzy ekonomicznej i rozbudził zainteresowania finansami oraz rynkiem kapitałowym.

Warszawa, 30 marca 2015 r.

Mariusz Włodarczyk

Koordinator Programu edukacyjnego UKNF
w VIII Liceum Ogólnokształcącym
im. Władysława IV w Warszawie

* **Komisja Nadzoru Finansowego (KNF)** – państwowy organ nadzoru, sprawujący nadzór nad sektorem bankowym, rynkiem kapitałowym, ubezpieczeniowym i emerytalnym, nad instytucjami płatniczymi i biurami usług płatniczych oraz nad spółdzielczymi kasami oszczędnościowo-kredytowymi i Krajową Spółdzielczą Kasą Oszczędnościowo-Kredytową. Celem nadzoru nad rynkiem finansowym jest zapewnienie prawidłowego funkcjonowania tego rynku, jego stabilności, bezpieczeństwa oraz przejrzystości, zaufania do rynku finansowego, a także zapewnienie ochrony interesów uczestników tego rynku.

Jan Duk

PODSTAWY ANALIZY SPRAWOZDAŃ FINANSOWYCH ORAZ ANALIZA WSKAŹNIKÓW GIEŁDOWYCH

Poziom: szkoła ponadgimnazjalna

Przedmiot: podstawy przedsiębiorczości, kółko matematyczne

Podstawa programowa kształcenia ogólnego:

Podstawy przedsiębiorczości

Człowiek przedsiębiorczy. Uczeń:

1. podejmuje racjonalne decyzje opierając się na posiadanych informacjach.

Instytucje rynkowe. Uczeń:

1. wymienia podstawowe wskaźniki giełdowe i wyjaśnia ich wagę w podejmowaniu decyzji dotyczących inwestowania na giełdzie;
2. rozróżnia i rozumie poszczególne pojęcia związane z inwestowaniem i opłacalnością inwestycji;
3. oblicza przewidywany zysk z przykładowej inwestycji kapitałowej w krótkim i długim okresie.

Cele zajęć: Uczeń:

- rozumie podstawowe pojęcia związane z analizą sprawozdań finansowych,
- oblicza wskaźniki giełdowe i interpretuje je.

Pojęcia kluczowe: inwestycje, spółka akcyjna, akcje, sprawozdanie finansowe, analiza sprawozdań finansowych, bilans, rachunek zysków i strat, rachunek przepływów pieniężnych, analiza wskaźnikowa.

Metody: praca w grupach, burza mózgów, rozwiązywanie zadań w grupach, rozwiązywanie zadań indywidualnie, poszukiwanie informacji w internecie.

Materiały:

inne scenariusze związane z inwestowaniem, dostępne w niniejszej publikacji oraz w publikacji *Scenariusze lekcji z zakresu rynku finansowego z zadaniami matematycznymi i logicznymi z odpowiedziami dla szkół gimnazjalnych i ponadgimnazjalnych*, kalkulator, przykładowe zadania, wskazany (choć nie jest konieczny) dostęp do internetu, informacje zamieszczone na stronie internetowej programu Akcjonariat Obywatelski (www.akcjonariatobywatelski.pl), prowadzonej przez Ministerstwo Skarbu Państwa.

Zwięzłe przedstawienie zagadnień stanowiących przedmiot lekcji:

Przedmiotem lekcji jest omówienie potrzeby dostępu inwestorów do informacji na temat sytuacji finansowej spółek akcyjnych, wyjaśnienie obowiązku publikowania sprawozdań finansowych, przedstawienie zasadniczych elementów sprawozdania finansowego oraz omówienie podstaw analizy sprawozdań finansowych przy zastosowaniu analizy wskaźnikowej.

Oszacowanie czasu niezbędnego do przeprowadzenia lekcji: 45 min.

Przebieg zajęć:

1. Wyjaśnij uczniom, czym jest sprawozdanie finansowe spółki akcyjnej i jakie znaczenie dla inwestorów ma jego publikacja

1. Wskaż uczniom, że jedną z popularnych form inwestycji jest inwestycja w akcje w spółkach akcyjnych. Wyjaśnij, że akcje są papierami wartościowymi, reprezentującymi prawo posiadacza (akcjonariusza) do własności w pewnej części przedsiębiorstwa działającego jako spółka akcyjna (emitenta). Akcje mogą być przedmiotem obrotu na giełdzie, co znacząco ułatwia kupno i sprzedaż tych papierów wartościowych.

2. Wyjaśnij uczniom, że inwestycję w akcje, tak jak każdą inną, można zdefiniować jako *sposób zagospodarowania posiadanych środków finansowych polegający na wyrzeczeniu się obecnej konsumpcji na rzecz oczekiwanych (ale niepewnych) przyszłych korzyści z tego tytułu*. Wyjaśnij, że w przypadku inwestycji w akcje:
 - 1) *Oczekiwana przyszła korzyścią* jest oczekiwane przez posiadacza akcji (akcjonariusza) osiągnięcie *dochodu* z tytułu posiadanych akcji, np. poprzez:
 - sprzedaż tych akcji za wyższą cenę niż cena ich nabycia;
 - uczestniczenie w zyskach wypracowanych przez tę spółkę poprzez otrzymywanie z tytułu posiadanych akcji *dywidendy*, tj. części zysku wypracowanego przez spółkę akcyjną, którą zarząd tej spółki zdecydował się wypłacić akcjonariuszom.
 - 2) *Niepewność przyszłych korzyści* (ryzyko inwestycyjne) wynika z możliwości nieosiągnięcia oczekiwanego dochodu, na przykład w wyniku:
 - spadku kursu akcji spółki, co uniemożliwi inwestorowi sprzedaż posiadanych akcji za cenę wyższą niż cena nabycia,
 - brak wypracowania przez spółkę zysków, co uniemożliwi inwestorowi otrzymanie dywidendy.
3. Na podstawie powyższych rozważań wyjaśnij uczniom, że dla inwestora pragnącego nabyć akcje w spółce akcyjnej, niezmiernie istotne jest, aby mógł on ocenić potencjalny dochód z inwestycji w akcje, tj. perspektywy wzrostu kursu akcji oraz perspektywy wypracowania przez tę spółkę zysku, a także aby mógł on ocenić poziom ryzyka wiążącego się z inwestycją w akcje, tj. skalę niepewności osiągnięcia oczekiwanego dochodu z tytułu inwestycji w akcje (więcej o dochodzie i ryzyku instrumentów finansowych zob. w scenariuszu pt. *Ryzyko inwestycyjne portfela inwestycyjnego. Metody optymalizacji portfela* zamieszczonego w publikacji *Scenariusze lekcji z zakresu rynku finansowego z zadaniami matematycznymi i logicznymi z odpowiedziami dla szkół gimnazjalnych i ponadgimnazjalnych*, wydanej nakładem Komisji Nadzoru Finansowego w 2015 roku, dostępnej również na stronie internetowej KNF).
4. Zwróć uwagę uczniów, że istotne znaczenie przy dokonywaniu oceny powyższych kryteriów ma wiedza na temat sytuacji finansowej przedsiębiorstwa, którego akcje mają stanowić przedmiot inwestycji, w tym wiedza na temat majątku, jakim dysponuje to przedsiębiorstwo, charakteru prowadzonej przez nie działalności gospodarczej, zysków, jakie osiągało ono do tej pory itp. Nie ulega wątpliwości, że przedsiębiorstwo emitujące akcje posiada znacznie większą wiedzę w tym zakresie, niż inwestor rozważający nabycie tych akcji. Wskaż uczniom, że taką sytuację w ekonomii określa się jako *asymetria informacji* – jest to sytuacja, w której uczestnicy rynku posiadają znacząco różny zasób informacji, co może negatywnie wpływać na rynek ze względu na fakt, że jego uczestnicy będą podejmowali nieoptymalne decyzje.
5. Wyjaśnij uczniom, że jedną z metod redukcji asymetrii informacji pomiędzy akcjonariuszami a spółkami akcyjnymi jest obowiązek sporządzania i publikowania przez spółki akcyjne (a także inne podmioty i jednostki organizacyjne, które jednak nie będą przedmiotem uwagi w tym scenariuszu) *sprawozdań finansowych*. Sprawozdanie finansowe jest uporządkowanym przedstawieniem sytuacji finansowej i wyników finansowych przedsiębiorstwa, mającym na celu dostarczenie uczestnikom rynku informacji użytecznych przy podejmowaniu przez nich decyzji gospodarczych czy inwestycyjnych.
6. Wyjaśnij uczniom, że zgodnie z obowiązującymi w Polsce przepisami prawa, spółki akcyjne, których akcje są dopuszczone do obrotu na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie S.A. (dalej GPW S.A.), są obowiązane do sporządzania sprawozdań rocznych, półrocznych i kwartalnych oraz publikowania ich w internecie. Jeżeli uczniowie posiadają w trakcie lekcji dostęp do internetu, to zachęć ich do odwiedzenia stron internetowych wybranych spółek akcyjnych, których akcje są dopuszczone do obrotu na GPW S.A. i przejrzenia przykładowych sprawozdań finansowych, w przeciwnym zaś przypadku – zachęć uczniów do wykonania tej czynności jako zadanie domowe.

II. Omów najważniejsze elementy sprawozdania finansowego

7. Wskaż uczniom, że za fundamentalne elementy sprawozdania finansowego należy uznać: *bilans, rachunek zysków i strat oraz rachunek przepływów pieniężnych*.
- 1) Bilans – jest to informacja na temat sytuacji majątkowej przedsiębiorstwa według stanu na początek i na koniec okresu sprawozdawczego, zawierająca zestawienie *aktywów, kapitału własnego i zobowiązań*. Narysuj na tablicy schematyczny bilans oraz omów krótko każdą z tych pozycji, wpisując do poszczególnych pól schematycznego bilansu przykładowe składniki, które mogą się tam znajdować. Wyjaśnij uczniom, że zestawienie aktywów zawiera wszelkie składniki majątkowe posiadane przez spółkę, w tym znaki towarowe, nieruchomości, maszyny, urządzenia, samochody, środki pieniężne itp. Wskaż, że co do zasady wszelkie składniki majątkowe składające się na aktywa spółki mogą zostać nabyte przez spółkę dzięki finansowaniu z dwóch źródeł:
 - z *kapitału własnego*, czyli co do zasady z kapitału wpaconego do spółki przez akcjonariuszy bądź z zysku wypracowanego przez spółkę w dotychczasowej działalności,
 - z *zobowiązań*, czyli co do zasady z kapitału pożyczonego przez spółkę – np. z banku w formie kredytu lub pożyczki bądź od obligatariuszy posiadających obligacje wyemitowane przez spółkę,(stąd obok zestawienia aktywów w bilansie widnieje zestawienie kapitału własnego i zobowiązań, jako form finansowania aktywów).
 - 2) Rachunek zysków i strat – jest to informacja na temat wyników finansowych wygenerowanych przez spółkę w ciągu okresu sprawozdawczego, obejmująca między innymi *przychody ze sprzedaży produktów i usług, koszty poniesione w toku prowadzonej działalności oraz wygenerowany przez spółkę zysk*. Wyjaśnij uczniom, że rachunek zysków i strat odgrywa kluczową rolę przy ocenie rentowności spółki, tj. zdolności do generowania zysku z prowadzonej działalności.
 - 3) Rachunek przepływów pieniężnych – jest to informacja na temat przepływów gotówki do i z przedsiębiorstwa, z wyszczególnieniem trzech obszarów działalności przedsiębiorstwa: działalności operacyjnej, inwestycyjnej i finansowej. Wyjaśnij uczniom, że informacje zawarte w rachunku przepływów pieniężnych stanowią istotne uzupełnienie danych zawartych w bilansie oraz rachunku zysków i strat, gdyż pozwalają ocenić zdolność spółki do generowania gotówki, w tym do oceny, czy wypracowany przez spółkę zysk jest poparty stosownym wpływem środków pieniężnych.
8. W zależności od tego, czy w trakcie lekcji uczniowie posiadają dostęp do internetu, czy też nie, zachęć ich do zidentyfikowania – w trakcie lekcji bądź w ramach zadania domowego – wskazanych powyżej elementów sprawozdania finansowego w wybranych sprawozdaniach finansowych spółek, których akcje są dopuszczone do obrotu na GPW S.A.

III. Przybliż uczniom, czym jest analiza wskaźnikowa oraz omów wybrane wskaźniki stosowane w analizie wskaźnikowej

9. Wyjaśnij uczniom, że inwestor posiadając – zagwarantowany prawem – dostęp do sprawozdań finansowych spółki akcyjnej, której akcje są dopuszczone do obrotu na GPW S.A., aby podjąć stosowną decyzję inwestycyjną dotyczącą kupna lub sprzedaży akcji, może przeprowadzić analizę danych zawartych w sprawozdaniu finansowym. Wskaż, że jedną z najpopularniejszych metod analizy sprawozdań finansowych jest *analiza wskaźnikowa*, polegająca na wykorzystaniu danych liczbowych zawartych w sprawozdaniu finansowym, jak również innych publicznie dostępnych danych, do obliczania *wskaźników* (stanowiących zazwyczaj iloraz dwóch wartości), a następnie porównywanie wartości tych wskaźników do ustalonych w analizie finansowej „norm” bądź do wartości tych wskaźników

obliczonych w odniesieniu do innych spółek, w celu dokonania oceny sytuacji finansowej przedsiębiorstwa.

10. Omów wybrane wskaźniki stosowane w analizie wskaźnikowej, przedstawiając każdorazowo na tablicy wzór na wartość danego wskaźnika:

- 1) *P/E* (ang. *price to earnings per share* – ‘cena do zysku na akcję’) – wskaż, że jest to wskaźnik stanowiący iloraz kursu akcji spółki notowanej na giełdzie (*P*) przez wysokość zysku netto przypadającego na jedną akcję (*E*). Z kolei zysk netto przypadający na jedną akcję oblicza się dzieląc zysk netto wypracowany przez spółkę w ciągu roku przez średnią ważoną liczbę akcji w ciągu roku (dane te można znaleźć w sprawozdaniu finansowym). Wskaż, że niezbędne jest uwzględnienie średniej ważonej liczby akcji w ciągu roku, nie zaś liczby akcji na konkretny moment, gdyż zysk netto jest kategorią ekonomiczną odnoszącą się do działalności przedsiębiorstwa w ciągu roku, nie zaś sytuacji przedsiębiorstwa w konkretnym momencie. Wyjaśnij, że teoretycznie niska wartość tego wskaźnika może oznaczać, że cena akcji danej spółki na giełdzie jest relatywnie niewielka, uwzględniając poziom zysków, jaki spółka ta generuje. Poinformuj uczniów, że część inwestorów uważa niski poziom tego wskaźnika za sygnał *niedowartościowania* akcji danej spółki, co powoduje perspektywę wzrostu kursu akcji tej spółki, tj. opłacalność ich zakupu; zaś wysoki poziom tego wskaźnika – za sygnał *przewartościowania* akcji danej spółki, co powoduje perspektywę spadku kursu akcji tej spółki, tj. brak opłacalności ich zakupu. Wskaż, że – mówiąc w dużym uproszczeniu – za niskie wartości wskaźnika *P/E* uważa się wartości niższe niż 10, zaś za wysokie wartości tego wskaźnika uważa się wartości wyższe niż 17. Zwróć jednak szczególną uwagę uczniów, że bardziej miarodajne od stosowania arbitralnie ustalonych „norm” jest porównanie wartości tego wskaźnika obliczonej dla analizowanej spółki do wartości tego wskaźnika dla spółek z tej samej branży i dokonanie na tej podstawie oceny, jaką wartość wskaźnika należy uznać za niską, a jaką za wysoką.
- 2) *P/BV* (ang. *price to book value* – cena do wartości księgowej) – wskaż, że jest to wskaźnik stanowiący iloraz kursu akcji spółki notowanej na giełdzie (*P*), który można utożsamiać z ceną rynkową kapitału własnego spółki przypadającego na jedną akcję, przez wartość księgową (wynikającą ze sprawozdania finansowego) kapitału własnego spółki przypadającą na jedną akcję (*BV*). Z kolei wartość księgową kapitału własnego przypadającą na jedną akcję oblicza się dzieląc wartość kapitału własnego przez liczbę akcji (dane te można znaleźć w sprawozdaniu finansowym). Wskaż, że niezbędne jest uwzględnienie liczby akcji na konkretny moment, nie zaś średniej ważonej liczby akcji w ciągu roku, gdyż kapitał własny jest kategorią ekonomiczną odnoszącą się do sytuacji przedsiębiorstwa w konkretnym momencie, nie obrazuje zaś działalności przedsiębiorstwa w ciągu roku. Wyjaśnij uczniom, że teoretycznie niska wartość tego wskaźnika świadczy o tym, że cena akcji spółki jest relatywnie niska, uwzględniając wartość majątku posiadanego przez spółkę, co może powodować perspektywę wzrostu kursu akcji tej spółki, co może świadczyć o opłacalności zakupu takich akcji. Wskaż jednakże, że zbyt niska wartość wskaźnika *P/BV* może oznaczać kłopoty finansowe spółki. Z kolei zbyt wysoka wartość wskaźnika *P/BV* oznacza, że akcje danej spółki są *przewartościowane*, co implikuje perspektywę spadku kursu akcji tej spółki, tj. brak opłacalności ich zakupu. Zwróć uwagę uczniów, że najbardziej miarodajne jest porównanie wartości tego wskaźnika obliczonej dla analizowanej spółki do wartości tego wskaźnika dla spółek z tej samej branży i dokonanie na tej podstawie oceny, jaką wartość wskaźnika należy uznać za niską, a jaką za wysoką.
- 3) *ROE* (ang. *return on equity* – stopa zwrotu z kapitału własnego) – wskaż, że jest to wskaźnik stanowiący iloraz wypracowanego w ciągu roku zysku netto przez kapitał własny spółki (dane te można znaleźć w sprawozdaniu finansowym). Wyjaśnij, że wskaźnik

ten informuje, jak wysoką stopę zwrotu uzyskała spółka z kapitału wpłaconego przez jej akcjonariuszy oraz że wysoka wartość tego wskaźnika oznacza wysoką efektywność spółki w wykorzystaniu kapitału wpłaconego przez akcjonariuszy celem wygenerowania zysku z prowadzonej działalności. Wyjaśnij również, że wysoka wartość wskaźnika *ROE* może powodować wypłatę inwestorom wysokiej dywidendy bądź zainwestowanie wypracowanych przez spółkę zysków w kolejne projekty inwestycyjne, które mogą przyczynić się do wzrostu wartości spółki. Wskaż, że za wysokie wartości wskaźnika *ROE* przyjmuje się już wartości na poziomie 15%–20%, jednakże bardziej miarodajne od stosowania arbitralnie ustalonych „norm” jest porównanie wartości tego wskaźnika obliczonej dla analizowanej spółki do wartości tego wskaźnika dla spółek z tej samej branży i dokonanie na tej podstawie oceny, jaką wartość wskaźnika należy uznać za niską, a jaką za wysoką.

Zadanie nr 1. *Kurs akcji spółki XYZ wynosi 24 zł. Ze sprawozdania finansowego spółki XYZ wynika, że w ostatnim dwunastomiesięcznym okresie zysk netto wypracowany przez tę spółkę wyniósł 14 mln zł, zaś średnia ważona liczba akcji tej spółki wyniosła 10 mln zł. Oblicz wartość wskaźnika P/E. Zinterpretuj otrzymany wynik.*

(Odpowiedź: $P/E = 24 \text{ zł} / (14\,000\,000 \text{ zł} / 10\,000\,000) \approx 17,14$. Wartość wskaźnika *P/E* przekraczającą 17 należy uznać za wartość wysoką, co może świadczyć o przewartościowaniu akcji spółki XYZ, tj. braku opłacalności ich nabycia.).

Zadanie nr 2. *Jak zmieni się interpretacja wyniku otrzymanego w zadaniu nr 1, jeżeli posiadamy informację, że średnia wartość wskaźnika P/E dla spółek działających w tej samej branży, co spółka XYZ, wynosi 25?*

(Odpowiedź: Porównanie wartości wskaźnika *P/E* obliczonego dla analizowanej spółki z wartością tego wskaźnika dla spółek działających w tej samej branży jest bardziej miarodajne, niż wykorzystanie arbitralnych „norm”. W takiej sytuacji, interpretacja zmieni się w ten sposób, że wartość wskaźnika *P/E* dla spółki XYZ na tle branży może świadczyć o niedowartościowaniu akcji spółki XYZ, tj. opłacalności ich nabycia.).

Zadanie nr 3. *Kurs akcji spółki ABC wynosi 140 zł. Ze sprawozdania finansowego spółki ABC wynika, że wartość księgowa kapitału własnego tej spółki wynosi 20 mln zł, zaś liczba akcji tej spółki wynosi 1 mln zł. Oblicz wartość wskaźnika P/BV. Zinterpretuj otrzymany wynik, wiedząc, że średnia wartość wskaźnika P/BV dla spółek działających w tej samej branży, co spółka ABC, wynosi 2.*

(Odpowiedź: $P/BV = 140 \text{ zł} / (20\,000\,000 \text{ zł} / 1\,000\,000) \approx 7$. Wartość wskaźnika *P/BV* dla spółki ABC jest znacznie większa niż średnia wartość tego wskaźnika dla spółek działających w tej samej branży, co może świadczyć o przewartościowaniu akcji spółki ABC, tj. braku opłacalności ich nabycia.).

Zadanie nr 4. *Wykorzystując dane z zadania 1, oblicz wartość wskaźnika ROE dla spółki XYZ, wiedząc, że ze sprawozdania finansowego spółki XYZ wynika, że wartość jej kapitału własnego wynosi 200 mln zł. Zinterpretuj otrzymany wynik, wiedząc, że średnia wartość wskaźnika ROE dla spółek działających w tej samej branży, co XYZ, wynosi 15%.*

(Odpowiedź: $ROE = 14\,000\,000 \text{ zł} / 200\,000\,000 \text{ zł} = 7\%$. Wartość wskaźnika *ROE* dla spółki XYZ jest mniejsza niż średnia wartość tego wskaźnika dla spółek działających w tej samej branży, co świadczy o relatywnie niskiej efektywności tej spółki w generowaniu zysku z kapitału wpłaconego przez akcjonariuszy).

Mateusz Mokrogulski

STOPY PROCENTOWE – ZAGADNIENIA PRAKTYCZNE (ZBIÓR ZADAŃ)

Poziom: szkoła ponadgimnazjalna

Przedmiot: matematyka, podstawy przedsiębiorczości

Podstawa programowa:

Matematyka

Liczyby rzeczywiste. Uczeń:

- wykonuje obliczenia procentowe, oblicza podatki, zysk z lokat (również złożonych na procent składany i na okres krótszy niż rok).

Podstawy przedsiębiorczości

Instytucje rynkowe. Uczeń:

- oblicza procent od kredytu i lokaty bankowej, oblicza możliwość spłaty zaciągniętego kredytu przy określonym dochodzie.

Cele zajęć: Uczeń:

- oblicza oprocentowanie roczne z lokaty bankowej,
- oblicza zysk z lokaty na różnych okresach,
- wylicza oprocentowanie kredytu i jego raty.

Pojęcia kluczowe: lokata, kredyt, oprocentowanie, odsetki, procent prosty i składany, kapitalizacja odsetek.

Zadanie 1.

Klient wpłacił 1000 zł na lokatę bankową. Oprocentowanie wynosi 4% w skali roku, a dochód nie podlega opodatkowaniu. Obowiązuje procent prosty, tj. odsetki dopisywane są jedynie do początkowo zdeponowanej kwoty. Ponadto kapitalizacja odsetek następuje „z dołu” w odstępach rocznych.

- Ile wynosi kwota lokaty na koniec:
 - pierwszego roku,
 - drugiego roku,
 - piątego roku?
- Jeszcze raz odpowiedź na powyższe pytania przy założeniu, że obowiązuje procent składany, tj. odsetki dopisywane są do początkowo zdeponowanej kwoty powiększonej o dotychczas naliczone odsetki.
- Po ilu latach kwota lokaty się podwoi w przypadku procentu:
 - prostego,
 - składanego?

Zadanie 2.

Klient wpłacił A złotych na lokatę bankową, której oprocentowanie w stosunku rocznym wynosi r (lub równoważnie $100r\%$). Obowiązuje procent składany, a kapitalizacja odsetek następuje m razy w roku z równą częstotliwością.

- Jaka będzie kwota lokaty na koniec roku? W jaki sposób częstotliwość kapitalizacji odsetek wpływa na końcową kwotę lokaty?
- Ile wyniosłaby kwota lokaty na koniec roku przy założeniu tzw. kapitalizacji ciągłej?

Zadanie 3.

Bank proponuje klientowi tzw. lokatę progresywną, której oprocentowanie jest różne w kolejnych kwartałach. Wynosi ono kolejno 2%, 4%, 5% i 9% w stosunku rocznym, odsetki są dopisywane do kapitału na koniec każdego kwartału oraz obowiązuje procent składany. Klient ma również do wyboru tradycyjną lokatę bankową, gdzie odsetki są dopisywane na zakończenie okresu oszczędzania. Horyzont obu lokat wynosi 1 rok. W jakim przedziale kształtuje się oprocentowanie lokaty tradycyjnej (w stosunku rocznym), jeżeli wiadomo, że po chwili zastanowienia klient wybiera lokatę progresywną? Dla uproszczenia obliczeń należy założyć, że każdy kwartał ma identyczną liczbę dni.

Zadanie 4.

Bank udzielił klientowi kredytu na kwotę 5000 zł. Kredyt będzie spłacany w systemie rat malejących (tj. stała wysokość części kapitałowej w poszczególnych ratach) przez 5 lat. Oprocentowanie wynosi 8% w skali roku a płatność raty ma następować w równych odstępach rocznych. Nie ma żadnych innych opłat. Ile wynosi całkowity koszt kredytu?

Zadanie 5.

Bank udzielił klientowi kredytu na kwotę 1000 zł. Kredyt będzie spłacany przez 2 lata, oprocentowanie w skali roku wynosi 10%, a płatność raty ma następować w odstępach rocznych. W którym przypadku całkowity koszt kredytu będzie wyższy, w przypadku rat malejących czy równych (w obu przypadkach nie ma żadnych innych opłat)? Odpowiedź uzasadnij stosownymi obliczeniami. Czy uzyskana odpowiedź można uogólnić na większą liczbę okresów kredytowania?

Zadanie 6.

Bank oferuje klientowi dwa rodzaje kredytów na okres 1 roku:

- o oprocentowaniu 10%, które jest płatne jednorazowo na koniec okresu kredytowania, bez prowizji i innych opłat,
- z prowizją 10%, która jest płatna jednorazowo „z góry”, bez odsetek i innych opłat?

Który kredyt jest korzystniejszy dla klienta?

Czy odpowiedź na powyższe pytanie będzie taka sama, jeżeli kredyt będzie spłacany w dwóch równych ratach półrocznych? Dla uproszczenia obliczeń należy założyć, że każde półrocze ma identyczną liczbę dni.

Zadanie 7.

Bank udzielił klientowi kredytu na kwotę 6000 zł. Oprocentowanie kredytu wynosi 12% w skali roku i nie ma żadnych innych opłat. Kredyt ma być spłacany w miesięcznych ratach malejących (tj. stała wysokość części kapitałowej w poszczególnych ratach) przez 1 rok.

- Ile wynosi całkowity koszt kredytu przy założeniu, że kredyt jest spłacany zgodnie z harmonogramem?
- Ile wyniosłby całkowity koszt kredytu, gdyby po 3 miesiącach regularnych spłat klient postanowił spłacić całość pozostającego zadłużenia?

Dla uproszczenia obliczeń należy założyć, że każdy miesiąc ma identyczną liczbę dni.

Zadanie 8.

Bank udzielił klientowi kredytu hipotecznego denominowanego w euro na kwotę 200 tys. zł. W tym czasie 1 euro kosztowało 4 zł. Po kilku latach regularnych spłat klient wpłacił łącznie 12% początkowego salda zadłużenia i po tym czasie postanowił spłacić pozostałą kwotę kredytu w całości. Jednak w analizowanym okresie polska waluta systematycznie się osłabiała i w momencie spłaty za 1 euro trzeba zapłacić 5 zł. Jakiej kwoty w złotych bank zażąda od klienta w celu całkowitej spłaty kredytu (bank nie nalicza prowizji z tytułu wcześniejszej spłaty kredytu)?

Zadanie 9.

Klient chce zaciągnąć kredyt na 1 rok. Miejskowy bank posiada w swojej ofercie dwa kredyty o następującej charakterystyce:

- złotowy o oprocentowaniu rocznym 10% (brak innych opłat),
- walutowy denominowany w euro o oprocentowaniu rocznym 6% (brak innych opłat).

W obu przypadkach spłata następuje na koniec okresu rozliczeniowego. W momencie podejmowania decyzji 1 euro kosztuje 4 zł. Jednocześnie przewiduje się, że w perspektywie roku złoty ostabi się i 1 euro będzie kosztowało 4,20 zł. Który kredyt jest korzystniejszy dla klienta?

Rozwiązania zadań

Zadanie 1. Procent prosty: po 1 roku: $1000 + 1000 \cdot 4\% = 1000 \cdot (1 + 4\%) = 1040$ zł;

po 2 latach: $1040 + 1000 \cdot 4\% = 1000 \cdot (1 + 2 \cdot 4\%) = 1080$ zł;

po 5 latach: $1000 \cdot (1 + 5 \cdot 4\%) = 1200$ zł

Procent składany: po 1 roku: $1000 \cdot (1 + 4\%) = 1040$ zł;

po 2 latach: $1040 \cdot (1 + 4\%) = 1000 \cdot (1 + 4\%) \cdot (1 + 4\%) = 1000 \cdot (1 + 4\%)^2 = 1081,60$ zł;

po 5 latach: $1000 \cdot (1 + 4\%)^5 = 1216,65$ zł

Podwojenie kwoty lokaty (n oznacza liczbę lat): procent prosty: $1000 \cdot (1 + n \cdot 4\%) = 2000$;
zatem $n = 25$ lat;

procent składany: $1000 \cdot (1 + 4\%)^n = 2000$; zatem $n = \log_{1,04} 2 = \ln 2 / \ln 1,04 = 17,67$,
czyli po 18 latach (a więc szybciej niż w przypadku procentu prostego).

Zadanie 2. Kwota lokaty na koniec roku: $A \cdot (1 + \frac{r}{m})^m$. Im wyższa częstotliwość naliczania odsetek (tj. im wyższe m), tym wyższa kwota lokaty. Przykładowo, dla $m = 1$ kwota lokaty to $A \cdot (1 + r)$, a dla $m = 2$ kwota lokaty to $A \cdot (1 + \frac{r}{2})^2 = A \cdot (1 + r + \frac{1}{4}r^2) > A \cdot (1 + r)$.

Kapitalizacja ciągła: dla $m \rightarrow \infty$ wyrażenie $(1 + \frac{r}{m})^m = \left((1 + \frac{r}{m})^{\frac{m}{r}} \right)^r \rightarrow e^r$,

czyli teoretycznie największa kwota lokaty to $A \cdot e^r$.

Zadanie 3. Problem sprowadza się do obliczenia tzw. oprocentowania efektywnego lokaty progresywnej. Gdyby odsetki były dopisywane w sposób prosty, wtedy oprocentowanie efektywne stanowiłoby średnią arytmetyczną oprocentowania w każdym kwartale, czyli 5%. W przypadku, gdy obowiązuje procent składany, lokata na kwotę A zwiększa się na koniec roku do:

$A \cdot (1 + \frac{2\%}{4}) \cdot (1 + \frac{4\%}{4}) \cdot (1 + \frac{5\%}{4}) \cdot (1 + \frac{9\%}{4}) = 1,0509 \cdot A$. Oprocentowanie efektywne wynosi zatem 5,09%. Jeżeli klient wybiera lokatę progresywną oznacza to, że oprocentowanie lokaty tradycyjnej jest mniejsze od 5,09% (w stosunku rocznym).

Zadanie 4. Niech TC_i (*total cost* – ang.) oznacza koszt kredytu, czyli w tym przypadku odsetki, na koniec i -tego roku. W każdej z rat część kapitałowa ma być taka sama, czyli równa $5000 / 5 = 1000$ zł. Po roku odsetki wynoszą: $TC_1 = 8\% \cdot 5000 = 400$ zł; po 2 latach: $TC_2 = 8\% \cdot 4000 = 320$ zł (odsetki płaci się od niespłaconej części kredytu, a po upływie pierwszego roku zostaje do spłacenia $5000 - 1000 = 4000$ zł). Analogicznie po 3 latach: $TC_3 = 8\% \cdot 3000 = 240$ zł; po 4 latach: $TC_4 = 8\% \cdot 2000 = 160$ zł; po 5 latach: $TC_5 = 8\% \cdot 1000 = 80$ zł. Zatem całkowity koszt wynosi $400 + 320 + 240 + 160 + 80 = 1200$ zł.

Harmonogram spłaty kredytu przedstawia poniższa tabela.

Rok	Rata	Kapitał	Odsetki	Saldo kredytu
0	-	-	-	5000
1	1400	1000	400	4000
2	1320	1000	320	3000
3	1240	1000	240	2000
4	1160	1000	160	1000
5	1080	1000	80	0
Suma	6200	5000	1200	-

Zadanie 5. W przypadku rat malejących całkowity koszt kredytu wynosi: $10\% \cdot 1000$ (tj. odsetki po roku) + $10\% \cdot 500$ (tj. odsetki po 2 latach) = $100 + 50 = 150$ zł.

Rok	Rata	Kapitał	Odsetki	Saldo kredytu
0	-	-	-	1000
1	600	500	100	500
2	550	500	50	0
Suma	1150	1000	150	-

W przypadku rat równych należy w pierwszej kolejności obliczyć wysokość raty. Niech K_i oznacza część kapitałową raty na koniec i -tego okresu, a O_i – część odsetkową raty na koniec i -tego okresu. Wiadomo, że $K_1 + O_1 = K_2 + O_2$ (raty równe), $O_1 = 10\% \cdot 1000 = 100$ zł, $K_2 = 1000 - K_1$ oraz $O_2 = 10\% \cdot (1000 - K_1)$.
 Zatem otrzymujemy równanie: $K_1 + 100 = 1000 - K_1 + 10\% \cdot (1000 - K_1)$.
 Stąd: $K_1 = 476,19$ zł, $K_2 = 523,81$ zł, $O_2 = 52,38$ zł. Można jednocześnie sprawdzić, że wysokość raty to 576,19 zł. Całkowity koszt kredytu wynosi więc $O_1 + O_2$, czyli 152,38 zł.

Rok	Rata	Kapitał	Odsetki	Saldo kredytu
0	-	-	-	1000
1	576,19	476,19	100	500
2	576,19	523,81	52,38	0
Suma	1152,38	1000	152,38	-

Jest on zatem wyższy niż w przypadku rat malejących. Jest to ogólna prawidłowość, która występuje także dla większej liczby okresów kredytowania (aczkolwiek zagadnienie staje się wtedy trudniejsze od strony analitycznej). Dzieje się tak, gdyż w przypadku rat równych spłata kapitału kredytu następuje niejako wolniej, tj. w początkowo spłacanych ratach jest mniej kapitału niż w przypadku rat malejących, gdzie część kapitałowa jest taka sama w każdej racie. Skoro w przypadku rat równych klient oddaje bankowi pożyczone środki przeciętnie później, to musi z tego tytułu ponosić wyższy koszt.

Zadanie 6. Korzystniejszy będzie pierwszy z kredytów, tj. o oprocentowaniu 10% i bez prowizji. W drugim przypadku konieczność zapłacenia prowizji powoduje, że klient, który chce zaciągnąć kredyt na kwotę A , otrzymuje tak naprawdę $A - 10\% \cdot A = 0,9 \cdot A$. Skoro po roku klient musi oddać bankowi kwotę A , oznacza to, że „odsetki” wynoszą $0,1 \cdot A$. „Oprocentowanie” jest zatem równe:

$(0,1 \cdot A) / (0,9 \cdot A) = 1/9 = 11,1\%$, czyli więcej niż w pierwszym przypadku.

W sytuacji, gdy kredyt jest spłacany w równych ratach półrocznych odpowiedź na zadane pytanie jest identyczna. Zwiększa się jedynie „oprocentowanie” kredytu drugiego, tj. jedynie z prowizją. Dzieje się tak dlatego, że w przypadku rat półrocznych trzeba bankowi nadal oddać 1000 zł, ale wcześniej, tzn. 500 zł już po pół roku, a to zwiększa „oprocentowanie”. Można je obliczyć następująco:

$$900 = \frac{500}{\left(1 + \frac{r}{2}\right)^1} + \frac{500}{\left(1 + \frac{r}{2}\right)^2}, \text{ gdzie } r \text{ oznacza roczną stopę procentową.}$$

W celu rozwiązania równania warto wprowadzić zmienną pomocniczą $x = (1 + r/2)$. W takiej sytuacji otrzymujemy równanie:

$$900 = \frac{500}{x} + \frac{500}{x^2}, \text{ czyli } 9x^2 - 5x - 5 = 0; \text{ zatem } x = \frac{5 - \sqrt{205}}{18} \text{ lub } x = \frac{5 + \sqrt{205}}{18}. \text{ Pierwsze rozwiązanie należy odrzucić, gdyż jest ono liczbą ujemną.}$$

Czyli $x \approx 1,073$, więc $r \approx 14,6\%$.

Zadanie 7. Niech TC_i oznacza koszt kredytu, czyli w tym przypadku odsetki, na koniec i -tego miesiąca. W każdej z rat część kapitałowa ma być taka sama, czyli równa $6000 / 12 = 500$ zł. Po miesiącu odsetki wynoszą: $TC_1 = (1/12) \cdot 12\% \cdot 6000 = 60$ zł; po 2 miesiącach: $TC_2 = (1/12) \cdot 12\% \cdot 5500 = 55$ zł (odsetki płaci się od niespłaconej części kredytu, a po upływie pierwszego miesiąca zostaje do spłacenia $6000 - 500 = 5500$ zł); analogicznie po 3 miesiącach: $TC_3 = (1/12) \cdot 12\% \cdot 5000 = 50$ zł i w każdym kolejnym miesiącu o 5 zł mniej. Całkowity koszt kredytu wynosi zatem (suma ciągu arytmetycznego):

$$5 + 10 + 15 + \dots + 50 + 55 + 60 = \frac{5+60}{2} \cdot 12 = 390 \text{ zł.}$$

Miesiąc	Rata	Kapitał	Odsetki	Saldo kredytu
0	-	-	-	6000
1	560	500	60	5500
2	555	500	55	5000
3	550	500	50	4500
4	545	500	45	4000
5	540	500	40	3500
6	535	500	35	3000
7	530	500	30	2500
8	525	500	25	2000
9	520	500	20	1500
10	515	500	15	1000
11	510	500	10	500
12	505	500	5	0
Suma	6390	6000	390	-

Gdyby kredyt został w całości spłacony po 3 miesiącach, wtedy całkowity koszt kredytu wyniósłby $50 + 55 + 60 = 165$ zł (oczywiście oprócz raty kapitałowo-odsetkowej, po 3 miesiącach klient musiałby spłacić całe pozostałe zadłużenie w kwocie 4500 zł).

Miesiąc	Rata	Kapitał	Odsetki	Saldo kredytu
0	-	-	-	6000
1	560	500	60	5500

2	555	500	55	5000
3	550 + 4500	500 + 4500	50	0
Suma	6165	6000	165	-

Zadanie 8. W momencie wypłaty kredytu bank przelicza kwotę kredytu na euro według kursu w danym dniu, tj. $200\ 000 / 4 = 50$ tys. euro. Od tej pory saldo zadłużenia jest wyrażone w euro. Po kilku latach do spłaty pozostanie zatem $50\ 000 - 12\% \cdot 50\ 000 = 44\ 000$ euro. Jeżeli w momencie spłaty 1 euro kosztuje 5 zł, to bank zażąda $5 \cdot 44\ 000 = 220$ tys. zł, a więc więcej niż wynosiło początkowe saldo zadłużenia w złotych. W przypadku nieoczekiwanej deprecjacji waluty krajowej, kredyty walutowe mogą okazać się dużo droższe niż złotowe. Dlatego, zgodnie z pkt. 6.2 Rekomendacji S Komisji Nadzoru Finansowego z czerwca 2013 r. kredyty walutowe, indeksowane lub denominowane w walutach obcych powinny być produktem oferowanym wyłącznie klientom uzyskującym trwałe dochody w walucie kredytu, zapewniające regularną obsługę i spłatę kredytu.

Zadanie 9. Korzystniejszy jest kredyt złotowy, w przypadku którego po roku klient będzie musiał zapłacić $1,1 \cdot A$, gdzie A oznacza kwotę kredytu. W przypadku kredytu walutowego oprocentowanie jest co prawda niższe, ale z uwagi na spodziewane osłabienie złotego klient po roku będzie musiał zapłacić (w złotych): $(A/4) \cdot 4,20 \cdot 1,06 = 1,113 \cdot A$. Jest to równoważne stwierdzeniu, że „oprocentowanie” kredytu wynosi 11,3%. W przypadku nieoczekiwanej deprecjacji waluty krajowej, kredyty walutowe mogą okazać się dużo droższe niż złotowe. Dlatego, zgodnie z pkt. 6.2 Rekomendacji S Komisji Nadzoru Finansowego z czerwca 2013 r. kredyty walutowe, indeksowane lub denominowane w walutach obcych powinny być produktem oferowanym wyłącznie klientom uzyskującym trwałe dochody w walucie kredytu, zapewniające regularną obsługę i spłatę kredytu.

**Scenariusz lekcji zaopiniowany przez VIII Liceum Ogólnokształcące im. Władysława IV w Warszawie*

Piotr Śliwka

PODSTAWY MATEMATYKI FINANSOWEJ – POJĘCIE RENTY MATEMATYCZNEJ

Poziom: szkoła ponadgimnazjalna

Przedmiot: podstawy przedsiębiorczości (i/lub kółko matematyczne),

Podstawa programowa kształcenia ogólnego:

Podstawy przedsiębiorczości.

Człowiek przedsiębiorczy – Uczeń:

1. podejmuje racjonalne decyzje opierając się na posiadanych informacjach, ocenia skutki własnych decyzji, potrafi ocenić potencjalny możliwy do osiągnięcia zysk z dostępnych inwestycji.

Instytucje rynkowe – Uczeń:

1. oblicza procent od kredytu i lokaty bankowej, ocenia możliwość spłaty zaciągniętego kredytu przy określonym dochodzie;
2. rozróżnia formy inwestowania kapitału i dostrzega zróżnicowanie stopnia ryzyka w zależności od rodzaju inwestycji oraz okresu inwestowania;
3. oblicza przewidywany zysk z przykładowej inwestycji kapitałowej w krótkim i długim okresie,
4. analizuje oferty banków, funduszy inwestycyjnych, firm ubezpieczeniowych i funduszy emerytalnych.

Cele zajęć: Uczeń:

- rozumie i rozróżnia podstawowe pojęcia związane z typem renty,
- wskazuje podstawowe zastosowanie rent matematycznych w życiu codziennym,
- umie wyznaczyć wartość renty matematycznej,
- potrafi ocenić opłacalność inwestycji oraz porównać oferty i dokonać racjonalnego wyboru, w których istotną rolę odgrywa renta matematyczna.

Pojęcia kluczowe: ciąg geometryczny, suma ciągu geometrycznego, ciąg płatności, renta matematyczna, rata, okres bazowy, wartość początkowa (końcowa) renty, renta płatna z dołu (z góry).

Metody: praca w grupach, burza mózgów, rozwiązywanie zadań w grupach, rozwiązywanie zadań indywidualnie.

Materiały:

- scenariusz *Wartość pieniądza w czasie* (część dotycząca stopy procentowej) zamieszczony w niniejszej publikacji dostępnej również w wersji elektronicznej na stronie internetowej www.knf.gov.pl,
- kalkulator,
- notatniki, arkusze papieru, flamastry,
- przykładowe zadania,
- podręczny słownik pojęć.

Przebieg zajęć:

1. Przypomnij ideę oraz pojęcia związane z ciągiem arytmetycznym oraz geometrycznym. W tym celu zapisz na tablicy 4 zestawy liczb, np.:

a) 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, ...,

b) 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, ...,

c) 256, 64, 16, 4, 1, $\frac{1}{4}$, ...,

d) 1, 3, 6, 7, 10, 11, 17, ...

i spytaj uczniów, czy można znaleźć cechę wspólną dla liczb występujących w poszczególnych ciągach. Uczniowie powinni zauważyć, że mają do czynienia w przypadku a) z ciągiem arytmetycznym ze stałą różnicą równą 2, w przypadku b) i c) z ciągiem geometrycznym ze stałym czynnikiem równym 2 i $\frac{1}{4}$ odpowiednio oraz z ciągiem niespełniającym warunku stałej różnicy i stałego ilorazu w przypadku d).

2. Przypomnij pojęcie ciągu sum częściowych S_n w przypadku ciągu geometrycznego a_n o wyrazie ogólnym $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-1}$ oraz w postaci $S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$ o ile $q \neq 1$. Zaznacz, że jeśli $a_1=0$ lub $|q| < 1$, wówczas S_n jest zbieżny i ma skończoną granicę.

3. Wprowadź pojęcie szeregu geometrycznego i zapisz sumę wyrazów używając symbolu Σ :

$$S_n = \sum_{j=1}^n a_1 q^{j-1}.$$

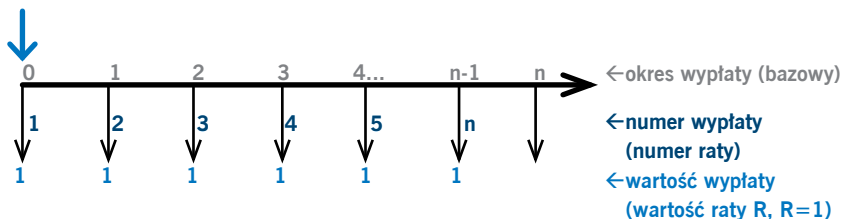
4. Poproś uczniów o zapisanie podpunktu 1 b) za pomocą wzoru z podpunktu 3. z użyciem Σ

w przypadku skończonym np. dla 7 pierwszych liczb: $\sum_{j=1}^7 3 * 2^{j-1}$ oraz nieskończonym: $\sum_{j=1}^{\infty} 3 * 2^{j-1}$

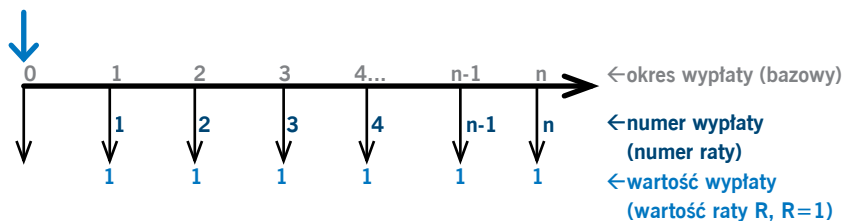
5. Wprowadź pojęcie renty matematycznej i związanych z nią własności. W tym celu poproś uczniów, aby podali przykłady regularnych (w równych odstępach, np. co tydzień, miesiąc, kwartał, rok, ...) ciągów płatności. W przypadku trudności ze znalezieniem przykładów zasugeruj np. regularną wpłatę stałej kwoty na konto bankowe, regularnie płaconą pensję, opłatę comiesięcznego czynszu, ratalną spłatę kredytu, okresowe świadczenia socjalne, płatne co roku obowiązkowe ubezpieczenie (np. OC) itd. Podkreśl, że w podanych przykładach charakterystyczną ich własnością jest regularność płatności.

6. Zdefiniuj pojęcie renty matematycznej: *renta matematyczna* (ang. annuities) oznacza każdy ciąg płatności okresowych (wpłat, wypłat) o jednakowej lub różnej wartości, ale mających miejsce w równych odstępach czasu (np. co miesiąc, co rok, ...).
7. Podkreśl, że przez *rentę* w potocznym tego słowa znaczeniu zazwyczaj rozumie się otrzymywane raz w miesiącu na rachunek bankowy świadczenie rentowe lub emerytalne z ZUS lub innej instytucji finansowo-ubezpieczeniowej. Zaznacz, że w obszarze finansów pojęcie *renty* ma bardziej uniwersalny charakter i zazwyczaj od potocznego rozumienia słowa *renta* odróżnia się poprzez dodanie słowa „matematyczna”, czyli *renta matematyczna* (w dalszej części scenariusza użyto tylko pojęcia *renta*, mając oczywiście na myśli *rentę matematyczną*, o ile nie będzie to prowadziło do nieporozumień).
8. Wprowadź kolejne pojęcia związane z rentą oraz jej charakterystyki: rata R_t renty wyznaczająca płatności (w przypadku stałych rat R_t przyjmujemy oznaczenie R) oraz okres bazowy renty (okres płatności renty) wyznaczający równe odstępy pomiędzy dwiema kolejnymi ratami (np. tydzień, miesiąc, kwartał, rok, itp.). Jako charakterystyki renty podaj również liczbę rat, oprocentowanie r w okresie bazowym, na podstawie którego naliczane są odsetki (ewentualnie sposób naliczania odsetek w podokresach) oraz moment uruchomienia renty.
9. Niektóre z wprowadzonych w podpunkcie 8. pojęć pokaż na poniższych schematach a) oraz b), podkreślając, iż różni je przesunięcie terminu wypłaty: w przypadku a) mamy do czynienia z *rentą płatną z góry*, własnością której jest, iż wpłata/wypłata zaczyna się w chwili 0 i kończy w chwili $n-1$, natomiast w przypadku b) z *rentą płatną z dołu*, własnością której jest, iż wpłata/wypłata zaczyna się w chwili 1 i kończy w chwili n (w obydwu przypadkach zakładamy identyczną stopę procentową r w tym okresie);

a) renta płatna z góry (zakładamy, że rata $R=1$ j.p.)



b) renta płatna z dołu (zakładamy, że rata $R=1$ j.p.)



10. Odwołaj się do wiedzy odnośnie wartości obecnej i współczynnika dyskonta v (np. scenariusz **Wartość pieniądza w czasie**, punkt V) i wykorzystując $v = \frac{1}{1+r}$ wyznacz wartość obecną poszczególnych rat (wypłat) opisanych w punkcie 9 w zależności od typu renty:
 - 10a) w przypadku renty płatnej z góry:
 - wartość obecna dla wypłaty nr 1 wynosi R j.p.,
 - dla wypłaty nr 2 wynosi $Rv = R \frac{1}{1+r}$ j.p.,

- dla wypłaty nr 3 wynosi $(Rv)v = R \left(\frac{1}{1+r}\right)^2$ j.p., ...,
 - dla wypłaty nr n (ostatniej) wynosi $(R v^{n-2}) v = R \left(\frac{1}{1+r}\right)^{n-1}$ j.p.
- Zwróć uwagę uczniów, że na chwilę 0 wartości poszczególnych wypłat nie są identyczne: największą wartością charakteryzuje się wartość obecna wypłaty pierwszej, natomiast najmniejszą – wartość obecna wypłaty ostatniej. Zapisz wartość obecną wszystkich wypłat przy założeniu, że $R=1$ za pomocą standardowego symbolu aktuarialnego $\ddot{a}_{\overline{n}|r}$:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|r} = 1 + v + v^2 + \dots + v^{n-1} = \frac{1 - v^n}{1 - v}$$

oraz wykorzystując wzór na sumę ciągu geometrycznego ($a_1=1, q=v$).

10.b) W przypadku renty płatnej z dołu:

- wartość obecna dla wypłaty nr 1 wynosi $R v$ j.p.,
- dla wypłaty nr 2 wynosi $R v^2 = R \left(\frac{1}{1+r}\right)^2$ j.p.,
- dla wypłaty nr 3 wynosi $(R v^2) v = R \left(\frac{1}{1+r}\right)^3$ j.p., ...,
- dla wypłaty nr n (ostatniej) wynosi $(R v^{n-1})v = R \left(\frac{1}{1+r}\right)^n$ j.p.

Ponownie zwróć uwagę uczniów, że na chwilę 0 największą wartością charakteryzuje się wartość obecna wypłaty pierwszej, natomiast najmniejszą – wartość obecna wypłaty ostatniej. Zapisz wartość obecną wszystkich wypłat przy założeniu, że wartość $R=1$ za pomocą standardowego symbolu aktuarialnego:

$$a_{\overline{n}|r} = v + v^2 + \dots + v^n = v \frac{1 - v^n}{1 - v} = \frac{1}{1+r} \frac{1 - \left(\frac{1}{1+r}\right)^n}{\frac{1}{1+r} - \frac{1}{1+r}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{1+r}\right)^n}{r} = \frac{1 - v^n}{r}$$

analogicznie korzystając ze wzoru na sumę ciągu geometrycznego ($a_1=1, q=v$).

11. Na podstawie wartości obecnych renty wyznacz wartości końcowe renty (WK), które oznaczają sumę jej rat na koniec trwania renty i korzystając z sumy ciągu geometrycznego zapisz je w skróconej postaci posługując się standardowymi oznaczeniami aktuarialnymi $\ddot{S}_{\overline{n}|r}$ oraz $S_{\overline{n}|r}$ odpowiednio:

a) w przypadku renty płatnej z góry oznaczanej przez $\ddot{S}_{\overline{n}|r}$:

$$R(1+r)^n + R(1+r)^{n-1} + \dots + R(1+r) = R(1+r)[(1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + \dots + 1] = R(1+r) \frac{(1+r)^n - 1}{r} = R\ddot{S}_{\overline{n}|r}$$

b) w przypadku renty płatnej z dołu oznaczanej przez $S_{\overline{n}|r}$:

$$R(1+r)^{n-1} + R(1+r)^{n-2} + \dots + R(1+r) + R = R((1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + \dots + (1+r) + 1) = R \frac{(1+r)^n - 1}{r} = R S_{\overline{n}|r}$$

12. Podkreśl, że wartość renty wyceniamy na podstawie zgromadzonego kapitału, który musi być równoważny tej rencie. Zazwyczaj wyceny wartości renty dokonujemy na początek trwania renty i na tej podstawie określamy wartość początkową renty (WP) lub na koniec jej trwania i wówczas określamy wartość końcową renty (WK). Przez wartość początkową renty rozumiemy zatem sumę wartości rat przeliczonych (zaktualizowanych) na moment początkowy renty. W przypadku próby porównania dwóch różnych rent stwierdzamy, że są one równoważne, jeżeli ich wartości początkowe będą identyczne.

13. Na przykładzie pokaż sposób wyznaczania wartości końcowej renty płatnej z góry oraz z dołu.

Przykład

Jaką kwotę osiągniemy za 3 lata, jeśli:

- a) na koniec każdego roku,
 - b) na początek każdego roku
- odkładamy 100 PLN na koncie oprocentowanym 10% w skali roku?

Rozwiązanie

Wiemy, że stała wartość wpłacana przez $n=3$ kolejne lata wynosi $R=100$ PLN przy stopie procentowej $r = 10\% = 0,1$. W przypadku a) ze względu na płatności na koniec okresu rozważamy rentę płatną z dołu, czyli wyznaczamy $s_{\overline{3}|0,1}$

$$100(1+0,1)^2 + 100(1+0,1) + 100 = 100(1,1^2+1,1+1) = 100*3,31 = 331 \text{ PLN.}$$

Zatem $s_{\overline{3}|0,1} = 3,31$.

W przypadku b) ze względu na płatności na początku okresu mamy do czynienia z rentą płatną z góry, zatem spodziewamy się, że kwoty wpłacane na początku każdego roku przyniosą większy zysk, niż w przypadku renty płatnej z dołu (spytaj uczniów dlaczego tak się dzieje?). Wyznaczamy $\ddot{s}_{\overline{3}|r}$:

$100(1+0,1)^3 + 100(1+0,1)^2 + 100(1+0,1) = 100(1,1^3+1,1^2+1,1) = 100*3,641 = 364,1$ PLN, czyli $\ddot{s}_{\overline{3}|r} = 3,641$, zatem zgodnie z przewidywaniami uzyskujemy wyższą wartość po upływie 3 lat.

14. Na koniec uogólnij dotychczasowe rozważania na przypadek renty płatnej w nieskończoność zwanej rentą wieczystą lub bezterminową. W takiej sytuacji mamy do czynienia z nieskończonym ciągiem geometrycznym. Wartość obecną renty tego typu wyznaczamy modyfikując np. wzór na wartość obecną renty płatnej z dołu w podpunkcie 10b) zastępując n symbolem nieskończoności ∞ : $a_{\overline{\infty}|r} = v + v^2 + \dots + v^n + \dots = \frac{1}{r}$, bądź wzór na wartość obecną renty płatnej z góry w podpunkcie 10a): $\ddot{a}_{\overline{\infty}|r} = \frac{1}{d}$, gdzie d jest stopą dyskonta przy ustalonej stopie procentowej r .

Zadania

Zadanie 1 (wartość obecną renty płatnej z dołu i z góry)

Andrzej postanowił, że przez 5 lat będzie oszczędzał wpłacając co roku 50 PLN w ramach programu inwestycyjnego oferowanego przez bank przy stopie procentowej rocznej $r=4\%$. Ile wyniesie wartość obecną takiego ciągu płatności?

Rozwiązanie

Regularne wpłaty w stałej wysokości możemy potraktować jako rentę. Ponieważ nie określono w którym momencie okresu bazowego, czyli roku następuje płatność, w związku z tym rozważymy dwa przypadki: na początek roku oraz na koniec. W pierwszym przypadku mamy do czynienia z rentą płatną z góry, zatem wartość obecną ciągu płatności wygląda następująco:

$$R\ddot{a}_{\overline{5}|0,04} = R + Rv + Rv^2 + Rv^3 + Rv^4 = 50 \left(1 + \frac{1}{1+0,04} + \frac{1}{(1+0,04)^2} + \frac{1}{(1+0,04)^3} + \frac{1}{(1+0,04)^4} \right) = 50 * 4,6299 \approx 231,5 \text{ PLN}$$

lub $R\ddot{a}_{\overline{5}|0,04} = 50 \frac{1 - \left(\frac{1}{1+0,04}\right)^5}{1 - \frac{1}{1+0,04}} = 231,5 \text{ PLN}.$

W drugim przypadku mamy do czynienia z rentą płatną z dołu i tutaj wartość obecną ciągu płatności zapisujemy w postaci:

$$Ra_{\overline{5}|0,04} = Rv + Rv^2 + Rv^3 + Rv^4 + Rv^5 = 50 \left(\frac{1}{1+0,04} + \frac{1}{(1+0,04)^2} + \frac{1}{(1+0,04)^3} + \frac{1}{(1+0,04)^4} + \frac{1}{(1+0,04)^5} \right) = 50 * 4,4518 \approx 222,59 \text{ PLN}$$

lub $Ra_{\overline{5}|0,04} = 50 \frac{1 - \left(\frac{1}{1+0,04}\right)^5}{0,04} = 222,59 \text{ PLN}.$

Zadanie 2 (wartość końcowa renty płatnej z dołu i z góry)

Adam postanowił, że przez rok będzie wpłacał 100 PLN każdego miesiąca na rachunek oprocentowany miesięczną stopą $r = 5\%$. Jaką kwotę będzie dysponował po roku, jeżeli wpłaty rozpoczną się:

- a) pierwszego,
 - b) ostatniego
- dnia każdego miesiąca?

Rozwiązanie

W pierwszym przypadku mamy do czynienia z rentą płatną z góry, której okres trwania wynosi $n=12$, przy stopie procentowej $r=5\%$ i stałej racie $R=100$ PLN. Zapiszmy postać równania na wartość końcową renty (pytanie dotyczy globalnej kwoty po zakończeniu inwestycji): $100(1+0,05)^{12} + 100(1+0,05)^{11} + \dots + 100(1+0,05)^2 + 100(1+0,05) = 100(1,05^{12} + \dots + 1,05^2 + 1,05) = 100 * 16,71298 = 1671,30$ PLN.

W przypadku b) ze względu na płatność na koniec okresu bazowego policzymy wartość końcową renty płatnej z dołu: $100(1+0,05)^{11} + 100(1+0,05)^{10} + \dots + 100(1+0,05) + 100 = 100(1,05^{11} + \dots + 1,05 + 1) = 100 * 15,91713 = 1591,71$ PLN. Zatem kwota uzbierana w przypadku renty płatnej z góry jest wyższa niż renta płatna z dołu.

Podręczny słownik pojęć i skrótów

Ciąg geometryczny – ciąg liczbowy, którego każdy wyraz następny jest iloczynem wyrazu poprzedniego i pewnej stałej (zazwyczaj q) poza pierwszym wyrazem tego ciągu.

j.p. – skrót: „jednostka pieniężna”.

Okres bazowy, okres płatności renty (z ang. *payment period*) – czas upływający między dwoma kolejnymi płatnościami (ratami).

Rata – wartość wyptacana lub wptacana okresowo.

Renta (z ang. *annuity*) – ciąg płatności dokonywanych w równych odstępach czasu.

Renta płatna z dołu – renta, w której raty płatne są na koniec okresu.

Renta płatna z góry – renta, w której raty płatne są na początek okresu.

Renta pewna (z ang. *annuity certain*) – płatności na pewno nastąpią.

Stopa procentowa – stosunek odsetek uzyskanych wskutek pracy pewnego kapitału do wartości tego kapitału w ustalonym przedziale czasowym.

Termin renty – ustalona chwila, do której mają miejsce płatności.

**Scenariusz lekcji zaopiniowany przez VIII Liceum Ogólnokształcące im. Władysława IV w Warszawie*

Piotr Śliwka

WYZNACZANIE RATY KREDYTU

Poziom: szkoła ponadgimnazjalna

Przedmiot: podstawy przedsiębiorczości (i/lub kółko matematyczne)

Podstawa programowa kształcenia ogólnego:

Podstawy przedsiębiorczości.

Człowiek przedsiębiorczy – Uczeń:

1. podejmuje racjonalne decyzje opierając się na posiadanych informacjach, ocenia skutki własnych działań.

Instytucje rynkowe – Uczeń:

1. oblicza procent od kredytu i lokaty bankowej, ocenia możliwość spłaty zaciągniętego kredytu przy określonym dochodzie;
2. oblicza przewidywany zysk z przykładowej inwestycji kapitałowej w krótkim i długim okresie;

3. analizuje oferty banków, funduszy inwestycyjnych, firm ubezpieczeniowych i funduszy emerytalnych.

Cele zajęć: Uczeń:

- zna, rozumie i rozróżnia podstawowe pojęcia związane z wyznaczaniem raty kredytu (w szczególności jej składowych),
- ocenia koszt kredytu,
- analizuje i porównuje dostępne oferty kredytu oraz dokonuje racjonalnego wyboru spośród dostępnych.

Pojęcia kluczowe: rata kredytu, część kapitałowa, część odsetkowa, oprocentowanie, koszt kredytu, rzeczywista roczna stopa procentowa (RRSO).

Metody: praca w grupach, burza mózgów, rozwiązywanie zadań w grupach, rozwiązywanie zadań indywidualnie.

Materiały:

- scenariusze lekcji *Podstawy matematyki finansowej – pojęcie renty matematycznej oraz Wartość pieniądza w czasie* zawarte w niniejszej publikacji dostępnej również w wersji elektronicznej na stronie internetowej www.knf.gov.pl,
- kalkulator,
- notatniki, arkusze papieru, flamastry,
- przykładowe zadania,
- podręczny słownik pojęć.

Przebieg zajęć:

I. Metody wyznaczania raty kredytu na podstawie klasycznych schematów amortyzacji

1. Przypomnij podstawowe pojęcia związane z oprocentowaniem (procent prosty, procent złożony, odsetki), zawarte m.in. w scenariuszu lekcji *Wartość pieniądza w czasie*, oraz pojęcie związane z ciągiem płatności (w szczególności: renta matematyczna) zawarte m.in. w scenariuszu lekcji *Podstawy matematyki finansowej – pojęcie renty matematycznej*.
2. Wprowadź podstawowe pojęcia związane z kredytem: pożyczkodawca (wierzyciel), pożyczkobiorca (dłużnik), instytucja udzielająca kredytu (np. bank) oraz umowa o kredyt precyzująca: strony umowy (np. z jednej strony bank, a z drugiej osoba fizyczna ubiegająca się o kredyt), cel kredytu (np. konsumpcyjny, hipoteczny,...), wysokość kwoty kredytu, koszt kredytu (oprocentowanie, marże, prowizje,...), moment uruchomienia kredytu oraz moment jego ostatecznej spłaty, ratę kredytu, sposób regulowania zobowiązań (np. stała rata płatna każdego 10-go dnia miesiąca), obsługę kredytu (specyfikacja bieżących rat kapitałowych, odsetkowych, itp.), okres karencji (przesunięcie w czasie spłaty pierwszej raty lub spłaty odsetek przez instytucję udzielającą kredyt, co zazwyczaj powoduje wydłużenie ostatecznego terminu spłaty kredytu). Podkreśl, że przed przystąpieniem do podpisania umowy bardzo ważne jest jej dokładne przeczytanie i zrozumienie zawartych w niej pojęć.
3. Wprowadź podział raty kredytu R na część kapitałową RK i odsetkową RO , czyli $R = RK + RO$. Wyjaśnij, że część kapitałowa RK spłaca kwotę kredytu zaciągniętego, natomiast część odsetkowa stanowi „koszt” kredytu i poza podstawowym oprocentowaniem może zawierać również marżę bankową, prowizję (czasami traktowaną jako odrębny składnik raty) oraz dodatkowe koszty zawarte w umowie.
4. W przypadku spłaty kredytu podkreśl, że do wyznaczenia wartości kapitału pozostałego do spłaty stosuje się zasadę równoważności wysokości zobowiązań i rat je spłacających, która wywodzi się z ogólniejszej zasady równoważności kapitałów: dwa kapitały są równoważne w chwili t , jeśli równe są ich wartości przeliczone na tę chwilę t . W przypadku spłaty zobowiązań zasada równoważności zobowiązania oraz spłacającego takie zobowiązanie ratalne brzmi: zadłużenie o wartości D_0 w chwili $t=0$ jest równoważne ciągowi spłacających je rat R_t ,

jeśli kapitały: udzielającego kredyt oraz spłacającego ten kredyt są równoważne wg powyższej zasady. Zauważ, że sprawdzienie równoważności kapitałów w tym przypadku sprowadza się do porównania zaktualizowanych na moment początkowy rat R spłacających wartość długu D wg wzoru: $D_0 = \sum_{t=1}^n \frac{R_t}{(1+r)^t}$, gdzie D_0 – wartość zobowiązania na początku uruchomienia kredytu spłacanego przez n okresów ratami w wysokości R , przy stałej stopie procentowej r .

5. Wprowadź pojęcie „schemat amortyzacji długu”, czyli metody związanej ze spłatą kredytu oraz obsługą zadłużenia, powszechnie stosowanego w instytucjach udzielających kredyt. Podkreśl, że w schemacie amortyzacji zakłada się, iż: a) każda regularna rata spłaca w pewnej części kapitał, a w pozostałej odsetki w trakcie trwania umowy kredytowej oraz b) brak spłaty w dowolnym okresie trwania spłaty kredytu zazwyczaj powoduje wzrost salda długu, czyli kwoty zadłużenia.
6. Podaj ogólną procedurę działania schematu:
 - a) wyznacz wartość raty R_k na podstawie wysokości zadłużenia D , liczby okresów i stopy procentowej r w zależności od schematu (sposób wyznaczenia raty-patrz podpunkt 8.),
 - b) wyznacz wysokość odsetek RO_k na podstawie stanu zadłużenia S_k oraz obowiązującej w tym okresie stopy procentowej r_k : $RO_k = r_k S_k$,
 - c) stan zadłużenia S_{k+1} w kolejnym okresie $k+1$ po wpłacie raty zależy od stanu zadłużenia S_k oraz wysokości raty R_{k+1} i związanych z nią odsetek RO_{k+1} , które zapisz w postaci rekurencyjnej: $S_{k+1} = S_k - RK_{k+1} = S_k - (R_{k+1} - RO_{k+1})$,
 - d) kontynuuj procedurę rekurencyjną do spłaty części kapitałowej ostatnią (n -tą) ratą (saldo długu S_n powinno osiągnąć 0 lub bliskie granicy 0).
7. Zapisz ostateczną postać schematu amortyzacji długu D przez n okresów w formie tabeli (zwróć uwagę na zaokrąglenia związane z groszami – 2 miejsca po przecinku):

Okres	Rata	Część odsetkowa	Część kapitałowa	Saldo długu
0				$D = S_0$
1	R_1	RO_1	RK_1	$S_1 = S_0 - RK_1$
...
j	R_j	RO_j	RK_j	$S_j = S_{j-1} - RK_j$
...
n	R_n	RO_n	RK_n	$S_n \sim 0$
Σ	ΣR_i	ΣRO_i	$\Sigma RK_i = D$	

8. W zależności od typu spłaty kredytu podaj sposób wyznaczenia raty R :
 - a) w przypadku stałej raty: $R = \frac{D}{a_{\overline{n}|r}}$, czyli zaciągnięty kredyt w wysokości D podziel przez aktualną wartość ciągu n płatności „z dołu” oznaczonych przez $a_{\overline{n}|r} = v + v^2 + \dots + v^n$, zwanych *wartością obecną renty płatnej z dołu* [patrz: scenariusz *Podstawy matematyki finansowej – pojęcie renty matematycznej*] przy ustalonej stopie procentowej r ;
 - b) w przypadku stałej części kapitałowej raty: $RK = \frac{D}{n}$, w której wysokość zadłużenia D podziel przez liczbę n okresów spłaty zadłużenia; wówczas $R_i = RK + RO_i$.
 9. Na przykładzie pokaż działanie schematu amortyzacji długu. Załóż, że klient zaciąga kredyt w wysokości 1000 PLN, ze stałą roczną stopą procentową $r=5\%$, który spłaca w 2 rocznych ratach na koniec każdego roku. Rozważ dwie sytuacje, w której bank proponuje a) spłatę ze stałymi ratami oraz b) spłatę ze stałą częścią kapitałową i podaj koszt kredytu.
- W przypadku a) wyznacz stałą ratę zgodnie z podpunktem 8a): $R = \frac{D}{a_{\overline{n}|r}}$. Wartość obecną renty

$a_{\overline{2}|0,05}$ wynosi $\frac{1}{1+0,05} + \left(\frac{1}{1+0,05}\right)^2 = 1.8594$, zatem $R = \frac{1000}{1,8594} = 537,8049$ PLN, z czego część

odsetkowa w pierwszym roku $RO = rD = 0,05 \cdot 1000 = 50$ PLN. Zapisując postać schematu amortyzacji wyznacz saldo długu sukcesywnie dla roku 1-szego i 2-go:

Termin spłaty t	Rata R=RO+RK	Część odsetkowa (RO)	Część kapitałowa (RK)	Saldo
				1000,00
1-wszy rok	537,81	50,00	537,81-50,00=487,81	512,19
2-gi rok	537,81	25,61	537,81-25,61=512,20	0,0
SUMA	1075,62	75,61	1000,0	

Zatem koszt kredytu wynosi 75,61 PLN.

W przypadku b) wyznacz ratę ze stałą częścią kapitałową zgodnie z punktem 8.b), czyli $RK = \frac{D}{n}$. W tej sytuacji $RK = \frac{1000}{2} = 500$ PLN i po doliczeniu części odsetkowej $RO_1 = rD = 0,05 \cdot 1000 = 50$ w pierwszym roku $R_1 = RK + RO_1 = 550$ PLN. Analogicznie, jak poprzednio, wstaw odpowiednie wartości do schematu amortyzacji:

Termin spłaty t	Rata R=RO+RK	Część odsetkowa (RO)	Część kapitałowa (RK)	Saldo
				1000,00
1-wszy rok	550,00	50,00	500,00	500,00
2-gi rok	525,00	25,00	500,00	0,0
SUMA	1075,00	75,00	1000,00	

Zatem koszt kredytu wynosi 75,00 PLN.

Zgodnie z przypuszczeniami spłata kredytu oparta na schemacie amortyzacji długu ze stałą częścią kapitałową jest „tańsza” z punktu widzenia kredytobiorcy.

10. Wprowadź pojęcie rzeczywistej rocznej stopy oprocentowania (RRSO, ang. *annual percentage rate*). Odwołaj się do ustawy z 12 V 2011 r. o kredycie konsumenckim, która wprowadziła wobec kredytodawców udzielających kredytów konsumenckich obowiązki podawania w reklamach produktów kredytowych RRSO. Podkreśl, że intencją ustawodawcy było m.in. ustalenie realnej stopy kosztu kredytu oraz ułatwienie potencjalnym kredytobiorcom porównania dostępnych na rynku ofert kredytowych. Zaznacz, że zgodnie z ustawą, RRSO powinna uwzględniać całkowity koszt kredytu (oprocentowanie, marże, prowizje, itp.), aby klient wptacając kwotę długu uzyskaną od kredytodawcy, np. na lokatę oprocentowaną stopą równą dokładnie RRSO podaną przy podpisaniu umowy o kredyt, uzyskał wysokość kwoty pokrywającej zaciągnięty dług wraz z odsetkami i dodatkami określonymi w umowie. W ustawie zawarto wzór

$$\sum_{k_1=1}^{t_1} \frac{D_{k_1}}{(1+r)^{t_{k_1}}} = \sum_{k_2=1}^{t_2} \frac{S_{k_2}}{(1+r)^{t_{k_2}}},$$

za pomocą którego porównując dwa strumienie płatności: wysokości D (długu) kredytodawcy względem kredytobiorcy w czasie t_1 oraz wysokości S (spłaty) kredytobiorcy względem kredytodawcy w czasie t_2 , wyznacza się szukaną RRSO.

Zadania

Zadanie nr 1 (schemat amortyzacji – stała rata)

Bank oferuje kredyt w wysokości 1200 PLN wyptacany na początku okresu kredytowania, opro-

centowany $r=10\%$ w skali roku i spłacany w równych ratach przez 6 lat. Wyznacz wysokość raty, stwórz schemat amortyzacji spłaty kredytu i podaj koszt kredytu.

Rozwiązanie

Konstruujemy schemat amortyzacji. W pierwszym kroku wyznaczamy stałą ratę przyrównując wysokość długu do zaktualizowanych współczynnikami dyskontującym $v = \frac{1}{1+r}$ na początek okresu

$$\text{sumat rat } R: 1200 = \frac{R}{(1+0,1)^1} + \frac{R}{(1+0,1)^2} + \frac{R}{(1+0,1)^3} + \frac{R}{(1+0,1)^4} + \frac{R}{(1+0,1)^5} + \frac{R}{(1+0,1)^6}, \text{ czyli}$$

$$R = \frac{1200}{\frac{1}{1+0,1} + \frac{1}{(1+0,1)^2} + \dots + \frac{1}{(1+0,1)^6}} \approx 275,53 \text{ PLN. Następnie wyznaczamy } RO_1 = 10\% * 1200 =$$

120 PLN oraz $RK_1 = 155,53$ PLN. Rekurencyjnie uzupełniamy kolejne wiersze schematu.

Termin spłaty t	Rata R=RO+RK	Część odsetkowa (RO)	Część kapitałowa (RK)	Saldo
				1200,00
1-szy rok	275,53	120,00	155,53	1044,47
2-gi rok	275,53	104,45	171,08	873,39
3-ci rok	275,53	87,34	188,19	685,20
4-ty rok	275,53	68,52	207,01	478,19
5-ty rok	275,53	47,82	227,71	250,48
6-ty rok	275,53	25,05	250,48	0,0
SUMA	1653,18 PLN	453,18 PLN	1200,00 PLN	

Zatem stała rata wynosi 275,53 PLN, koszt kredytu natomiast 453,18 PLN.

Zadanie nr 2 (schemat amortyzacji – stała część kapitałowa)

Bank oferuje kredyt w wysokości 1200 PLN wypłacany na początku okresu kredytowania, oprocentowany 10% w skali roku i spłacany w ratach ze stałą częścią kapitałową co 2 miesiące. Wyznacz wysokość rat, stwórz schemat amortyzacji spłaty kredytu i podaj koszt kredytu.

Rozwiązanie

W tym przypadku stała część kapitałowa $RK = \frac{1200}{6} = 200$ PLN oraz $RO_1 = 10\% * 1200 = 120$ PLN.

Analogicznie do zadania 1 uzupełniamy rekurencyjnie poniższy schemat.

Termin spłaty t	Rata R=RO+RK	Część odsetkowa (RO)	Część kapitałowa (RK)	Saldo
				1200,00
1-szy rok	320,00	120,00	200,00	1000,00
2-gi rok	300,00	100,00	200,00	800,00
3-ci rok	280,00	80,00	200,00	600,00
4-ty rok	260,00	60,00	200,00	400,00
5-ty rok	240,00	40,00	200,00	200,00
6-ty rok	220,00	20,00	200,00	0,00
SUMA	1620,00 PLN	420,00 PLN	1200,00 PLN	

Na podstawie danych w tabeli część kapitałowa raty kredytu wynosi 200 PLN, natomiast koszt kredytu 420 PLN.

Zadanie nr 3 (RRSO)

Kredytobiorca zaciąga kredyt w banku w wysokości 2000 PLN na okres 2 lat, który zostanie spłacony po ósmym kwartale w wysokości 2400 PLN. Wyznacz RRSO.

Rozwiązanie

Wyznaczenie RRSO możliwe jest po zrównoważeniu wysokości długu i wysokości spłaty:

$$\sum_{i=1}^m \frac{D_i}{(1+r)^{t_i}} = \sum_{j=1}^n \frac{S_j}{(1+r)^{\tau_j}}, \text{ czyli } D_1=2000, S_1=2400, t_1=0, \tau_1=8/4=2 \text{ i po podstawieniu}$$

$$\text{do wzoru: } \frac{2000}{(1+r)^0} = \frac{2400}{(1+r)^2}, \text{ skąd } (1+r)^2=1,2, \text{ czyli } r=(1,2)^{1/2}-1=9,5445\% \equiv \text{RRSO.}$$

Zadanie nr 4 (RRSO)

Kredytobiorca zaciąga kredyt w banku w wysokości 2000 PLN na okres 2 lat, który zostanie spłacony w 2 ratach: po czwartym kwartale w wysokości 1200 PLN oraz po ósmym kwartale w wysokości 1000 PLN. Dodatkowo za udzielenie kredytu bank pobiera prowizję w wysokości 100 PLN na początku uruchomienia kredytu. Czy powyższa oferta bankowa jest korzystniejsza (z punktu widzenia kredytobiorcy) od oferty z zadania 3?

Rozwiązanie

Odpowiedź na powyższe pytanie możliwa jest po wyznaczeniu RRSO i porównaniu jej z RRSO z zadania 3. W tym celu ponownie skorzystamy z warunku równoważności między wielkością długu i wielkością jego spłaty zapisując odpowiednie równanie równoważności przepływu kapitałów. Mamy: $D_1 = 2000, S_0 = 100, S_1 = 1200, S_2 = 1000, t_1=0, \tau_1=0, \tau_2=4/4=1, \tau_3=8/4=2,$

$$\text{zatem: } \frac{2000}{(1+r)^0} = \frac{100}{(1+r)^0} + \frac{1200}{(1+r)^1} + \frac{1000}{(1+r)^2}, \text{ czyli } 2000=100+1200(1+r)^{-1}+1000(1+r)^{-2},$$

skąd $1900(1+r)^2 - 1200(1+r) - 1000 = 0, \Delta=9040000, r_1=-1,48 \notin D_r, r_2=0,107016 \in D_r,$ czyli $\text{RRSO} = 10,7\% > 9,54\%$, zatem koszt kredytu w tym przypadku jest nieco wyższy z punktu widzenia kredytobiorcy. Istotną rolę odgrywa tu prowizja pobrana na początku okresu kredytowania oraz spłata części kredytu w środku okresu kredytowania, chociaż nominalna kwota kredytu do spłaty jest niższa w stosunku do podanej w zadaniu 3.

Podręczny słownik pojęć i skrótów

Część kapitałowa raty – część raty spłacająca zaciągnięty dług.

Część odsetkowa raty – część raty związana z „kosztem” kredytu.

j.p. – jednostka pieniężna (np. PLN, USD, Euro,...).

Kredyt – umowa między dwoma stronami (zazwyczaj instytucją udzielającą pieniędzy i kredytobiorcą), w ramach której instytucja finansowa udostępnia pieniądze w określonej kwocie, na konkretny cel oraz ustalony czas, a kredytobiorca zobowiązuje się do wykorzystania pieniędzy zgodnie z przeznaczeniem i zwrotu pożyczonej kwoty w ustalonym czasie z ustalonymi odsetkami.

Odsetki – dochód płynący z udostępnienia bankowi środków pieniężnych z tytułu depozytu/lokaty lub koszt pozyskania środków pieniężnych w formie kredytu/pożyczki. Ich wysokość zależy od oprocentowania ustalonego między stronami umowy lokaty lub umowy kredytu/pożyczki.

Oprocentowanie – stopa procentowa podawana w skali rocznej, określająca wysokość odsetek od depozytu, które otrzyma depozytariusz lub odsetek od pożyczki/kredytu, które będzie płacić pożyczkobiorca/kredytobiorca.

RRSO – rzeczywista roczna stopa oprocentowania podawana przez instytucje finansowe oferujące kredyt klientom, umożliwia łatwe porównanie ofert kredytów proponowanych przez różne instytucje.

Bożenna Zielińska-Kurpiel

JAK OCENIĆ KOSZTY ZWIĄZANE Z UMOWAMI UBEZPIECZENIA NA ŻYCIE Z UBEZPIECZENIOWYMI FUNDUSZAMI KAPITAŁOWYMI (UFK)

Poziom: szkoła ponadgimnazjalna

Przedmiot: podstawy przedsiębiorczości, kółko matematyczne

Podstawa programowa kształcenia ogólnego:

Podstawy przedsiębiorczości.

Człowiek przedsiębiorczy – Uczeń:

1. podejmuje racjonalne decyzje opierając się na posiadanych informacjach, ocenia skutki własnych decyzji, potrafi ocenić przedstawione mu oferty ubezpieczeń na życie z ubezpieczeniowymi funduszami kapitałowymi.

Instytucje rynkowe – Uczeń:

1. rozróżnia i rozumie poszczególne pojęcia związane z ubezpieczeniami na życie z ubezpieczeniowymi funduszami kapitałowymi;
2. analizuje oferty i dokonuje racjonalnego wyboru wśród dostępnych ofert ubezpieczeń na życie z ubezpieczeniowymi funduszami kapitałowymi;
3. wyjaśnia rolę, jaką w gospodarce pełnią instytucje rynkowe: bank centralny, banki komercyjne, firmy ubezpieczeniowe, fundusze inwestycyjne, Giełda Papierów Wartościowych, fundusze emerytalne.

Cele zajęć: Uczeń:

- rozumie i rozróżnia podstawowe pojęcia związane z ubezpieczeniami na życie z ubezpieczeniowymi funduszami kapitałowymi,
- wskazuje podstawowe koszty związane z tego typu umowami ubezpieczenia na życie,
- uświadamia sobie ryzyko związane z lokowaniem środków finansowych w ubezpieczeniowe fundusze kapitałowe,
- porównuje dostępne oferty ubezpieczeń na życie z ubezpieczeniowymi funduszami kapitałowymi i dokonuje racjonalnego wyboru.

Pojęcia kluczowe: zakład ubezpieczeń, ubezpieczenie na życie, składka ubezpieczeniowa, zakres ochrony, ryzyka ubezpieczeniowe, wniosek, polisa, ogólne warunki ubezpieczenia (OWU), tabela opłat i limitów, ubezpieczeniowy fundusz kapitałowy (UFK), jednostka uczestnictwa UFK (j.u.), alokacja składki, wartość wykupu, ubezpieczający, ubezpieczony, Komisja Nadzoru Finansowego (KNF).

Metody: praca w grupach (rozwiązywanie zadań w grupach), dyskusja, burza mózgów.

Materiały:

- kalkulator,
- notatniki, arkusze papieru, flamastry,
- przykładowe zadania zawierające oferty ubezpieczeń na życie z ubezpieczeniowymi funduszami kapitałowymi,
- *Zakłady ubezpieczeń i ich usługi. Nadzór, licencje, produkty*, D. Leśniak, E. Sienicka, B. Wojno, publikacja edukacyjna wydana nakładem KNF w 2014 r. dostępna w wersji elektronicznej na stronie internetowej www.knf.gov.pl.

Czas zajęć: 1 godzina lekcyjna (45 minut).

Przebieg zajęć:

1. Przedstaw uczniom temat i cel zajęć. Wskaż, że zakład ubezpieczeń prowadzi działalność ubezpieczeniową przez którą rozumie się wykonywanie czynności ubezpieczeniowych związanych z oferowaniem i udzielaniem ochrony na wypadek ryzyka wystąpienia skutków zdarzeń losowych. Zakłady ubezpieczeń na życie w swojej ofercie posiadają także ubezpieczenia na życie z ubezpieczeniowymi funduszami kapitałowymi. Wskaż na podstawy prawne działania zakładów ubezpieczeń. Zaznacz przy tym, że zakład ubezpieczeń jest przedsiębiorstwem nastawionym na zysk. Przypomnij, że działalność zakładów ubezpieczeń w Polsce jest regulowana przepisami prawa i objęta nadzorem Komisji Nadzoru Finansowego (dalej KNF).
2. Zapytaj uczniów, czy znają zasady funkcjonowania zakładów ubezpieczeń na życie oraz zakres ich działalności, jak również jakie mają własne doświadczenia w tym zakresie. Zwróć uwagę, że zakłady ubezpieczeń na życie mają szeroką ofertę produktów, nie tylko ściśle ochronnych, ale także z elementami oszczędnościowo-inwestycyjnymi. Wskaż, że inne zakłady ubezpieczeń oferują ubezpieczenia na życie, a inne ubezpieczenia majątkowe. Podkreśl, że nie każda oferta spełnia oczekiwania każdego klienta oraz, że w pewnych sytuacjach, zakład ubezpieczeń może odmówić zawarcia umowy ubezpieczenia.
3. Zwróć uwagę, że każdy obecny i przyszły klient zakładu ubezpieczeń na życie powinien znać swoje prawa, ale i obowiązki w relacjach z ubezpieczycielem. Podkreśl, że klient zakładu ubezpieczeń na życie zanim podejmie decyzję o skorzystaniu z danej oferty powinien ją przeanalizować, ewentualnie porównać z innymi podobnego typu ofertami, a zanim zawrze umowę ubezpieczenia powinien zapoznać się z tekstem wniosku ubezpieczeniowego oraz ogólnymi warunkami ubezpieczenia (OWU). Ważnym elementem każdego wzorca umownego jest tabela opłat i limitów, która zawiera podstawowe informacje m.in. o opłatach (kosztach) ponoszonych w związku z zawartą umową ubezpieczenia na życie. Po zawarciu umowy ubezpieczenia klient powinien dokładnie przeczytać polisę, która zawiera warunki potwierdzające na jakich zasadach zawarta została umowa ubezpieczenia. Zwróć uwagę, że celem zajęć jest pokazanie różnic pomiędzy różnymi ofertami zakładów ubezpieczeń na życie w zakresie oferowania ubezpieczeń na życie z ubezpieczeniowymi funduszami kapitałowymi oraz zwrócenie uwagi na koszty (opłaty) jakie mogą wiązać się z zawarciem i wykonywaniem, a także z rozwiązaniem umowy ubezpieczenia, co powinno mieć istotne znaczenie przy podejmowaniu decyzji o wyborze danej oferty ubezpieczeniowej. Podkreśl, iż ryzyko lokowania środków w ubezpieczeniowe fundusze kapitałowe ponosi ubezpieczający (klient) i to on decyduje w jakie fundusze alokowana jest ta część składki ubezpieczeniowej, która przeznaczona jest na inwestycję. Lokowanie środków w ubezpieczeniowe fundusze kapitałowe związane jest z ryzykiem możliwości utraty części zainwestowanych środków.
4. W celu przeprowadzenia ćwiczeń podziel klasę na dwie grupy i wyjaśnij, jaki przebieg będą miały zajęcia. Każda z grup otrzyma po trzy takie same zadania i po ich rozwiązaniu powinna przedstawić ofertę ubezpieczenia na życie z ubezpieczeniowymi funduszami kapitałowymi, która pod względem wysokości kosztów jest najbardziej korzystna dla klienta.
5. Podsumuj zajęcia i podkreśl, że wybór ubezpieczenia na życie z ubezpieczeniowymi funduszami kapitałowymi powinien być poprzedzony analizą kosztów każdej oferty, decyzja o zakupie danego produktu ubezpieczeniowego powinna być przemyślana, a wybór oferty nie powinien być dokonywany jedynie na podstawie stóp zwrotu z ubezpieczeniowych funduszy kapitałowych. Porozmawiaj z uczniami o tym, czego nauczyli się na lekcji. Zapytaj, czy postawione przed nimi zadania sprawiły trudności oraz jakie informacje okazały się najbardziej przydatne. Część zadań do wykonania można zadać uczniom jako pracę domową.

Zadania:

Dokonaj analizy przedstawionych poniżej ofert, a następnie:

1. Policz i wskaż, która z trzech przedstawionych poniżej ofert charakteryzuje się najniższymi kosztami związanymi z zawarciem i wykonywaniem umowy ubezpieczenia. Uzasadnij swój wybór.
2. Policz i wskaż, która z trzech ofert, przy poniższych założeniach, pozwoli na uzyskanie najwyższej szacunkowej wartości rachunku po pięciu latach trwania umowy ubezpieczenia.
3. Policz i wskaż, która z ofert, w przypadku wcześniejszej rezygnacji z umowy ubezpieczenia, tj. w drugim roku trwania umowy ubezpieczenia pozwoli na uzyskanie najwyższej wartości wykupu. Uzasadnij swój wybór.
4. Wskaż, która z trzech przedstawionych ofert jest najbardziej korzystna dla klienta, który ma problemy z regulowaniem składek ubezpieczeniowych, nie chce jednak wypowiadać umowy ubezpieczenia. Uzasadnij swój wybór oraz wskaż, dlaczego tak ważna jest możliwość czasowego zaprzestawania regulowania składek ubezpieczeniowych w umowach ubezpieczenia na życie z ubezpieczeniowymi funduszami kapitałowymi.

Założenia wspólne dla wszystkich trzech ofert:

- w ramach wszystkich trzech ofert umów ubezpieczenia z ubezpieczeniowymi funduszami kapitałowymi (UFK) dostępne są takie same ubezpieczeniowe fundusze kapitałowe, których ceny (w zł) dla każdego roku podano w tabeli zamieszczonej poniżej – dla uproszczenia przyjęto założenie, że cena jednostki uczestnictwa UFK (j.u.) nie zmienia się w ciągu roku:

Rok trwania umowy	1 rok	2 rok	3 rok	4 rok	5 rok
UFK Akcji	5,00	5,10	5,20	5,10	5,40
UFK Obligacji	3,00	3,10	3,20	3,40	3,50
UFK Zakładu Ubezpieczeń Zrównoważony	2,00	2,05	2,10	2,20	2,30
UFK Zagraniczny Zakład Ubezpieczeń Surowcowy	5,00	5,20	5,25	5,40	5,60
UFK Zagraniczny Zakład Ubezpieczeń Rynki Wschodzące	5,00	5,30	5,20	5,50	5,40

- składka ubezpieczeniowa przeznaczona na inwestowanie w UFK została alokowana w następujący sposób: UFK Akcji – 20% składki, UFK Obligacji – 10% składki, UFK Zakładu Ubezpieczeń Zrównoważony – 30% składki, UFK Zagraniczny Zakład Ubezpieczeń Surowcowy – 20% składki, UFK Zagraniczny Zakład Ubezpieczeń Rynki Wschodzące – 20% składki;
- składka ubezpieczeniowa wynosi 200 zł i płatna jest z częstotliwością miesięczną (wysokość składki nie ulega zmianie);
- suma ubezpieczenia z tytułu śmierci wynosi 15 000 zł plus wartość zgromadzonych środków na rachunku UFK (na rachunku tym zapisywane są jednostki uczestnictwa ubezpieczeniowych funduszy kapitałowych, które zostały zakupione za część składki ubezpieczeniowej przeznaczonej na inwestycje);
- opłata za ryzyko ubezpieczeniowe wynosi 5 zł, pobierana jest miesięcznie i potrącana przed alokacją składki w poszczególne UFK od składki ubezpieczeniowej;
- opłata za zarządzanie pomniejsza tę część wartości rachunku UFK, która utworzona została z jednostek uczestnictwa ubezpieczeniowych funduszy kapitałowych podlegających tej opłacie, pobierana jest na koniec każdego roku trwania umowy ubezpieczenia;
- liczbę jednostek uczestnictwa UFK (j.u.) należy wyliczać do czterech miejsc po przecinku (części tysięcznych).

Oferta umowy ubezpieczenia na życie z UFK nr 1

- Opłata dystrybucyjna wynosi 10% składki ubezpieczeniowej należnej za każdy miesiąc polisy i pobierana jest w pierwszym roku trwania umowy ubezpieczenia;
- opłata administracyjna wynosi 15 zł (przez cały okres trwania umowy ubezpieczenia), pobierana jest miesięcznie i potrącana przed alokacją składki w poszczególne UFK od składki ubezpieczeniowej;

- od niektórych funduszy znajdujących się w ofercie zakładu ubezpieczeń pobierana jest opłata za zarządzanie: UFK Zakładu Ubezpieczeń Zrównoważony – 2% w skali roku, UFK Zagraniczny Zakładu Ubezpieczeń Surowcowy – 3% w skali roku, UFK Zagraniczny Zakładu Ubezpieczeń Rynki Wschodzące – 1,5% w skali roku;
- w przypadku wcześniejszej rezygnacji z umowy ubezpieczenia na życie z UFK wyptacana jest wartość rachunku UFK, a opłata za wcześniejszy wykup ubezpieczenia wynosi 30% wartości rachunku UFK w pierwszym i drugim roku trwania umowy;
- każdemu ubezpieczającemu przysługuje premia dodatkowa w wysokości 2% wartości rachunku naliczana w pięciu pierwszych latach trwania umowy ubezpieczenia przed pobraniem opłaty za zarządzanie (ewidencjonowana na odrębnym rachunku w zł);
- po pięciu latach trwania umowy ubezpieczenia istnieje możliwość przejścia na ubezpieczenie bezskładkowe;
- istnieje możliwość zawieszenia opłacania składek raz na 3 lata maksymalnie na okres 3 miesięcy.

Oferta umowy ubezpieczenia na życie z UFK nr 2

- Opłata dystrybucyjna wynosi 15 zł od składki ubezpieczeniowej należnej za każdy miesiąc polisowy i pobierana jest w pierwszym roku trwania umowy ubezpieczenia;
- opłata administracyjna wynosi: w pierwszym i drugim roku trwania umowy – 5%, w trzecim i czwartym roku trwania umowy – 4%, od piątego roku trwania umowy – 3%, pobierana jest miesięcznie i potrącana przed alokacją składki w poszczególne UFK od składki ubezpieczeniowej;
- od niektórych funduszy znajdujących się w ofercie zakładu ubezpieczeń pobierana jest opłata za zarządzanie: UFK Zakładu Ubezpieczeń Zrównoważony – 1% w skali roku, UFK Zagraniczny Zakładu Ubezpieczeń Surowcowy – 2% w skali roku, UFK Zagraniczny Zakładu Ubezpieczeń Rynki Wschodzące – 1% w skali roku;
- w przypadku wcześniejszej rezygnacji z umowy ubezpieczenia na życie z UFK wyptacana jest wartość rachunku UFK, a opłata za wcześniejszy wykup ubezpieczenia wynosi 40% wartości rachunku UFK w pierwszym i drugim roku trwania umowy;
- każdemu ubezpieczającemu przysługuje premia dodatkowa w wysokości 2% wartości rachunku naliczana w pięciu pierwszych latach trwania umowy ubezpieczenia przed pobraniem opłaty za zarządzanie (ewidencjonowana na odrębnym rachunku w zł);
- po trzech latach trwania umowy ubezpieczenia istnieje możliwość przejścia na ubezpieczenie bezskładkowe;
- istnieje możliwość zawieszenia opłacania składek raz na 2 lata maksymalnie na okres 6 miesięcy.

Oferta umowy ubezpieczenia na życie z UFK nr 3

- Opłata dystrybucyjna wynosi 60% składki ubezpieczeniowej należnej za każdy miesiąc polisowy i pobierana jest w pierwszym roku trwania umowy ubezpieczenia;
- opłata administracyjna wynosi: w pierwszym i drugim roku trwania umowy – 5%, w trzecim i czwartym roku trwania umowy – 4%, od piątego roku trwania umowy – 3%, pobierana jest miesięcznie i potrącana przed alokacją składki w poszczególne UFK od składki ubezpieczeniowej;
- od niektórych funduszy znajdujących się w ofercie zakładu ubezpieczeń pobierana jest opłata za zarządzanie: UFK Zakładu Ubezpieczeń Zrównoważony – 1,5% w skali roku, UFK Zagraniczny Zakładu Ubezpieczeń Surowcowy – 2,5% w skali roku, UFK Zagraniczny Zakładu Ubezpieczeń Rynki Wschodzące – 1,5% w skali roku;
- w przypadku wcześniejszej rezygnacji z umowy ubezpieczenia na życie z UFK wyptacana jest wartość rachunku UFK, a opłata za wcześniejszy wykup ubezpieczenia wynosi 10% wartości rachunku UFK w pierwszym i drugim roku trwania umowy;
- każdemu ubezpieczającemu przysługuje premia dodatkowa w wysokości 5% wartości rachunku naliczana jednorazowo na koniec piątego roku trwania umowy ubezpieczenia przed pobraniem opłaty za zarządzanie (ewidencjonowana na odrębnym rachunku w zł);

- brak możliwości przejścia na ubezpieczenie bezskładkowe;
- istnieje możliwość zawieszenia opłacania składek raz na 5 lat maksymalnie na okres 6 miesięcy.

Odpowiedzi:

Ad. 1. Najniższymi kosztami związanymi z zawarciem i wykonywaniem umowy ubezpieczenia charakteryzuje się oferta nr 2, w której łączne koszty związane z takimi opłatami, jak opłata za ryzyko, opłata dystrybucyjna oraz opłata administracyjna, są niższe niż w pozostałych ofertach. Można przyjąć założenie, że nie są brane pod uwagę koszty związane z opłatą za zarządzanie, ponieważ już z samego porównania oferty widać, że opłaty te są najniższe w ofercie nr 2. W ofercie nr 2 część składki, która pozostaje do zainwestowania w poszczególne UFK, jest wyższa niż w ofercie nr 1 w każdym roku trwania umowy ubezpieczenia oraz wyższa w 1. roku trwania umowy ubezpieczenia od oferty nr 3.

Koszty w zł (bez opłaty za zarządzanie)	1 rok	5 lat łącznie
Oferta nr 1	480,00	1440,00
Oferta nr 2	360,00	984,00
Oferta nr 3	1620,00	2244,00

Ad. 2. Oferta nr 2 pozwoli na uzyskanie najwyższej szacunkowej wartości rachunku po pięciu latach trwania umowy ubezpieczenia.

Wskazówka: przy liczeniu wartości rachunku UFK na koniec danego roku najlepiej policzyć łączną liczbę jednostek uczestnictwa wszystkich UFK zaewidencjonowanych na rachunku na koniec roku i przemnożyć przez cenę j.u. poszczególnych UFK, następnie odliczyć koszty związane z opłatą za zarządzanie oraz dodać wartość premii.

Oferta	Szacunkowa wartość rachunku UFK w zł po 5 latach trwania umowy ubezpieczenia
Oferta nr 1	11 227,25
Oferta nr 2	11 783,15
Oferta nr 3	10 631,19

Ad. 3. Oferta nr 1 pozwoli na uzyskanie najwyższej wartości wykupu w przypadku wcześniejszej rezygnacji z umowy ubezpieczenia, tj. w drugim roku trwania umowy ubezpieczenia.

Oferta	Szacunkowa wartość rachunku UFK w zł po 2 latach trwania umowy ubezpieczenia	Opłata za wykup w zł	Wartość wypłaty w zł (wartość wykupu)
Oferta nr 1	4167,52	1250,26	2917,27
Oferta nr 2	4378,62	1751,45	2627,17
Oferta nr 3	2989,29	149,46	2839,82

Ad. 4. Najbardziej korzystna jest oferta nr 2, która pozwala zarówno na przekształcenie umowy ubezpieczenia w ubezpieczenie bezskładkowe, jak i daje możliwość najczęstszego zawieszenia opłacania składek.

Jan Duk, Piotr Śliwka, Bożenna Zielińska-Kurpiel

WARTOŚĆ PIENIĄDZA W CZASIE

Poziom: szkoła ponadgimnazjalna

Przedmiot: podstawy przedsiębiorczości i/lub kółko matematyczne

Podstawa programowa kształcenia ogólnego:

Podstawy przedsiębiorczości.

Człowiek przedsiębiorczy – Uczeń:

1. podejmuje racjonalne decyzje opierając się na posiadanych informacjach, ocenia skutki własnych decyzji, potrafi ocenić potencjalny możliwy do osiągnięcia zysk z inwestycji.

Instytucje rynkowe – Uczeń:

1. rozróżnia i rozumie poszczególne pojęcia związane z inwestowaniem i opłacalnością inwestycji;
2. analizuje oferty i dokonuje racjonalnego wyboru wśród dostępnych ofert inwestycyjnych;
3. wyjaśnia rolę, jaką w gospodarce pełnią instytucje rynkowe: bank centralny, banki komercyjne, firmy ubezpieczeniowe, Ubezpieczeniowy Fundusz Gwarancyjny, fundusze inwestycyjne, Giełda Papierów Wartościowych, fundusze emerytalne.

Cele zajęć: Uczeń:

- rozumie i rozróżnia podstawowe pojęcia związane z inwestowaniem,
- wskazuje podstawowe mierniki opłacalności inwestycji i potrafi je zastosować,
- potrafi ocenić opłacalność inwestycji,
- porównuje dostępne oferty inwestycji i dokonuje racjonalnego wyboru.

Pojęcia kluczowe: kapitał, koszt kapitału, stopa oprocentowania, oprocentowanie (proste, złożone), odsetki, wartość obecna, wartość przyszła, przepływy pieniężne, zdyskontowany ciąg płatności (*NPV, net present value, discounted cash flow analysis*), inwestycja, przychody, stopa zwrotu (*Rate of Return, Yield Rate*), okres zwrotu (*Payback Period, PP*), wewnętrzna stopa zwrotu (*Internal Rate of Return, IRR*), indeks rentowności (*Profitability Index, PI*), mierniki rentowności inwestycji.

Metody: praca w grupach, burza mózgów, rozwiązywanie zadań w grupach, rozwiązywanie zadań indywidualnie.

Materiały:

- inne scenariusze lekcji związane z inwestowaniem dostępne w niniejszej publikacji oraz w publikacji edukacyjnej *Scenariusze lekcji z zakresu rynku finansowego z zadaniami matematycznymi i logicznymi z odpowiedziami dla szkół gimnazjalnych i ponadgimnazjalnych* wydanych nakładem Komisji Nadzoru Finansowego (KNF) w 2015 roku, dostępnych również w wersji elektronicznej na stronie internetowej KNF www.knf.gov.pl,
- *Czy rata mojego kredytu nie jest za wysoka. Podstawy matematyki finansowej*, P. Śliwka, publikacja edukacyjna wydana nakładem KNF w 2013 roku, dostępna również w wersji elektronicznej na stronie internetowej KNF www.knf.gov.pl,
- *Zakłady ubezpieczeń i ich usługi. Nadzór, licencje, produkty*, D. Leśniak, E. Sienicka, B. Wojno, publikacja edukacyjna wydana nakładem KNF w 2014 roku, dostępna również w wersji elektronicznej na stronie internetowej KNF www.knf.gov.pl,
- kalkulator,

- notatniki, arkusze papieru, flamastry,
- przykładowe zadania,
- podręczny słownik pojęć.

Czas zajęć: 2–3 godziny lekcyjne.

Przebieg zajęć:

I. Omów tło historyczno-filozoficzne wartości pieniądza w czasie

- Zwróć uwagę uczniów, że – co do zasady – 100 zł płatne dzisiaj nie jest warte tyle samo, co 100 zł płatne za rok. Na przykład, chcąc pożyczyć dzisiaj 100 zł na okres jednego roku, najpewniej po upływie jednego roku będziemy zobowiązani do oddania kwoty wyższej niż 100 zł. Podobnie, wpłacając dzisiaj kwotę 100 zł do banku na rachunek oszczędnościowy na okres jednego roku, najpewniej po upływie jednego roku będziemy uprawnieni do otrzymania kwoty wyższej niż 100 zł (co do zasady – za wyjątkiem nadzwyczajnych sytuacji, takich jak występowanie ujemnej bądź zerowej stopy procentowej).
- Różnica pomiędzy kwotą, którą należy oddać a kwotą pożyczoną stanowi o występowaniu *kosztu kapitału* – wynagrodzenia, jakie należy zapłacić posiadaczowi kapitału (w tym przypadku: pieniądza), aby korzystać z tego kapitału przez określony czas.
- Sprokuj dyskusję na temat wyjaśnienia przyczyn, w wyniku których obserwujemy występowanie owego wynagrodzenia za korzystanie z kapitału. Pokieruj dyskusją w taki sposób, by zwrócić uwagę uczniów na następujące możliwe przyczyny:
 - odroczenie konsumpcji – pożyczając 100 zł na okres jednego roku, pożyczkodawca pozbawiony jest możliwości wykorzystania (konsumpcji) tych 100 zł przez ten czas, podczas gdy ludzie preferują (wołą) konsumpcję dzisiaj, niż konsumpcję za rok – pożyczkodawca będzie więc oczekiwał wynagrodzenia za odroczenie możliwości skonsumowania tych 100 zł przez okres jednego roku;
 - utrącone możliwości inwestycyjne – pożyczając 100 zł na okres jednego roku, pożyczkodawca pozbawiony jest możliwości zainwestowania tych 100 zł na ten okres, np. wpłacenia ich na rachunek oszczędnościowy w banku, co przyniosłoby mu zysk – pożyczkodawca będzie więc oczekiwał wynagrodzenia za utratę potencjalnego zysku z możliwości zainwestowania tych 100 zł przez okres jednego roku;
 - ryzyko – pożyczając 100 zł na okres jednego roku, pożyczkodawca ryzykuje (nie ma pewności), że pożyczkobiorca nie zwróci mu pożyczonych pieniędzy – pożyczkodawca będzie więc oczekiwał wynagrodzenia za poniesione ryzyko (brak pewności).
- Zwróć uwagę uczniów, że w historii, jak również obecnie, poglądy na temat moralności żądania przez pożyczkodawcę zwrotu kwoty wyższej od kwoty pożyczonej, tj. na temat naliczania odsetek, nie były jednoznaczne. W średniowiecznej cywilizacji europejskiej praktyka ta była uznawana za co najmniej wątpliwą moralnie ze względu na fakt, że pożyczanie pieniędzy samo w sobie nie wiąże się z nakładem pracy bądź produkcją jakiegoś dobra, w związku z czym nie dostrzegano tytułu, z jakiego pożyczkodawca miałby otrzymać wynagrodzenie za pożyczanie pieniędzy. Ponadto, w gospodarce średniowiecznej pożyczanie pieniędzy wynikało przede wszystkim z konieczności zaspokojenia potrzeb ludności w sytuacji na przykład nieurodzajnych żniw lub pożarów i w takich sytuacjach żądanie zwrotu kwoty większej niż kwoty podlegającej pożyczce uznawano za wątpliwe moralnie. Poglądy na ten temat uległy zmianie w renesansie, kiedy to wraz z rozwojem gospodarki pożyczanie przestało zaspokajać jedynie potrzeby konsumpcyjne, ale zaczęło być również wykorzystywane przez przedsiębiorców (np. kupców), w celach związanych z prowadzoną przez nich działalnością, w związku z czym coraz powszechniej uznawane były argumenty uzasadniające naliczanie opłat za pożyczanie pieniędzy (odsetek).

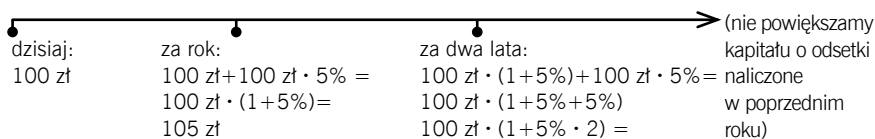
5. Wyjaśnij uczniom, że obecnie za niedopuszczalne uznawane jest naliczanie rażąco wysokich odsetek, co uważane jest za formę wyzysku dłużnika i nazywane jest *lichwą*. Polskie ustawodawstwo przewiduje *maksymalną wysokość odsetek* w wysokości czterokrotności stopy kredytu lombardowego Narodowego Banku Polskiego (aktualna wysokość stopy kredytu lombardowego dostępna jest m.in. na stronach internetowych Narodowego Banku Polskiego).

II. Omów, czym jest oprocentowanie i dyskontowanie

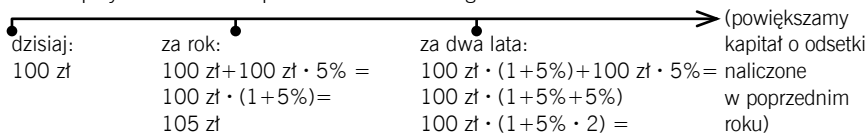
6. Wskaż uczniom, że *koszt kapitału*, czyli wynagrodzenie jakie należy zapłacić posiadaczowi pieniądza, aby korzystać przez określony czas z tego kapitału, nazywany jest *stopą procentową*. Nazwa *stopa procentowa* bierze się stąd, że koszt pieniądza wyrażamy najczęściej jako procent wartości kapitału. *Stopa procentowa* jest co do zasady wyrażana w stosunku rocznym (łac. *per annum*). Jeżeli więc pożyczamy komuś 100 zł na okres jednego roku przy stopie procentowej 5%, po upływie jednego roku będziemy oczekiwać zwrotu kwoty 100 zł powiększonej o 5% ze 100 zł, tj. łącznie 105 zł. Kwota 5 zł będzie w tym wypadku nazwana *odsetkami*.
7. Wyjaśnij uczniom, że *oprocentowanie* jest mechanizmem przekształcania wartości kapitału dzisiaj do wartości kapitału w przyszłości. W powyższym przykładzie, *oprocentowanie* będzie mechanizmem przekształcenia dzisiejszej kwoty 100 zł do kwoty 105 zł za rok, przy zastosowaniu określonej *stopy procentowej* (5%). Procesem odwrotnym do *oprocentowania* jest *dyskontowanie*. *Dyskontowanie* pozwala więc przekształcić kwotę kapitału, której płatność przypada w przyszłości, na wartość tego kapitału dzisiaj.

III. Wskaż sposób obliczania oprocentowania prostego i złożonego

8. Przypomnij uczniom, że w powyższym przykładzie dodatkowe 5 zł pozyskane przez pożyczkodawcę z tytułu pożyczania kwoty 100 zł, nazwalimy *odsetkami*. Załóżmy teraz, że pożyczkodawca i pożyczkobiorca po upływie roku zdecydowali się przedłużyć okres pożyczki o kolejny rok, przy zachowaniu tej samej stopy procentowej, wynoszącej 5%. Zapytaj uczniów, jaka – w ich opinii – kwota powinna zostać zwrócona po dwóch latach. Zapisz przykładowe odpowiedzi na tablicy. Przedyskutuj z uczniami wskazane przez nich odpowiedzi.
9. Wyjaśnij uczniom, że w powyższym przykładzie, wartość dzisiejszych 100 zł za dwa lata jest zależna od tego, czy po upływie pierwszego roku powiększymy kapitał o odsetki naliczone przez okres pierwszego roku, które po upływie pierwszego roku wyniosą 5 zł, co powiększy wartość kapitału podlegającego oprocentowaniu w okresie drugiego roku, czy też nie dodamy odsetek do kapitału po upływie pierwszego roku. Dodawanie odsetek do kapitału nazywamy *kapitalizacją odsetek*. W zależności od tego, czy stosujemy *kapitalizację odsetek*, czy też nie, wyróżniamy – odpowiednio *oprocentowanie złożone* oraz *oprocentowanie proste*.
10. Przedstaw uczniom na tablicy powyższy przykład pożyczki 100 zł na okres 2 lat przy stopie procentowej 5% na osi czasu, przy zastosowaniu oprocentowania prostego:



a także przy zastosowaniu oprocentowania złożonego:



11. Ekstrapolując powyższy przykład, zapisz na tablicy uogólniony wzór na wartość kapitału K_n , po upływie n lat, przy kapitale początkowym K oraz stopie procentowej r i corocznych płatnościach odsetek, przy zastosowaniu oprocentowania prostego:

$$K_n = K \cdot (1 + r \cdot n),$$

oraz przy zastosowaniu oprocentowania złożonego:

$$K_n = K \cdot (1 + r)^n.$$

12. Zwróć uwagę ucznióm, że w powyższym przykładzie, przy okresie 2 lat różnica pomiędzy kapitałem pomnożonym w wyniku oprocentowania złożonego i prostego wynosi jedynie 25 gr. Przy wykorzystaniu powyższych wzorów, zachęć ucznióm do sprawdzenia, jak ta różnica będzie się kształtowała przy okresie 5, 10, 20 i 50 lat. Wyjaśnij ucznióm znaczenie oprocentowania złożonego przy dłuższych okresach.

IV. Wskaż sposób dyskontowania prostego i złożonego

13. Wykorzystując określone w poprzednim punkcie wzory na oprocentowanie proste i oprocentowanie złożone, wyprowadź na tablicy wzory objaśniające proces odwrotny do oprocentowania, pozwalające przekształcić wartość kapitału K_n , którego płatność przypada za n lat, na wartość kapitału K w dniu dzisiejszym, poprzez zastosowanie dyskontowania prostego:

$$K = \frac{K_n}{(1 + r \cdot n)},$$

oraz dyskontowania złożonego:

$$K = \frac{K_n}{(1 + r)^n}.$$

V. Omów czym jest wartość obecna i wartość przyszła przepływu pieniężnego oraz mnożnik wartości obecnej (współczynnik dyskonta) i mnożnik wartości przyszłej

14. Wyjaśnij ucznióm, że mechanizm oprocentowania i dyskontowania odgrywa w ekonomii znaczącą rolę, gdyż pozwala na przekształcanie wartości przepływów pieniężnych w czasie, w tym wyrażanie dzisiejszej wartości przyszłych przepływów pieniężnych, co jest niezbędne między innymi przy analizie opłacalności inwestycji, których struktura zakłada wystąpienie określonych przepływów pieniężnych w przyszłości.
15. Wskaż ucznióm, że do określania dzisiejszej wartości przepływu pieniężnego, którego płatność przypada w przyszłości, używa się terminu *wartość obecna* (ang. *present value*), którą oznacza się jako *PV*. Wyjaśnij, że do wyznaczania wartości obecnej, *PV*, przepływu pieniężnego C_n , którego płatność przypada za n lat, co do zasady stosuje się wyprowadzony poniżej wzór objaśniający dyskontowanie złożone:

$$PV = \frac{C_n}{(1 + r)^n}.$$

Zwróć uwagę ucznióm, że powyższe wyrażenie często przedstawia się również w postaci iloczynowej:

$$PV = \left(\frac{1}{1 + r}\right)^n \cdot C_n,$$

gdzie czynnik $v_n = (1/(1+r))^n$ nazywany jest *mnożnikiem wartości obecnej* lub *współczynnikiem dyskonta*. Taka postać pozwala często na uproszczenie obliczeń.

16. Wskaż ucznióm, że do określania przyszłej wartości przepływu pieniężnego, którego płatność przypada dzisiaj, używa się terminu *wartość przyszła* (ang. *future value*), którą oznacza się

jako FV . Wyjaśnij, że do wyznaczania wartości przyszłej FV , przepływu pieniężnego C_0 , którego płatność przypada dzisiaj, co do zasady stosuje się wyprowadzony poniżej wzór objaśniający oprocentowanie złożone:

$$FV = C_0 \cdot (1+r)^n.$$

Zwróć uwagę uczniów, że czynnik $(1+r)^n$ nazywany jest *mnożnikiem wartości przyszłej*.

VI. Zdefiniuj pojęcia: „wartość obecna netto inwestycji”, „stopa zwrotu”, „ciąg płatności”, „zdyskontowany ciąg płatności”, „okres zwrotu” i zilustruj ich działanie na przykładach oraz podaj sposoby mierzenia opłacalności (rentowności) inwestycji

17. Jako punkt wyjścia przyjmij, iż C_0, C_1, \dots, C_n oznacza przepływy gotówki (wpłaty lub wypłaty) w okresach (np. latach) $0, 1, \dots, n$, przy czym $C_t < 0$ ($t=0, 1, \dots, n$) oznacza przyrost kapitału (inwestycja), natomiast $C_t > 0$ oznacza odpływ kapitału (zwrot z inwestycji) w chwili t z punktu widzenia inwestora. Ponadto załóż, że wpłaty mają miejsce w okresach o jednakowej długości. Podkreśl, że na powyższe założenia można spojrzeć symetrycznie: wypłaty netto oznaczane jako R_0, R_1, \dots, R_n w okresach $t = 0, 1, 2, \dots, n$ interpretujemy jako wpłaty ze znakiem ujemnym, czyli $R_t = -C_t$. Podkreśl, że standardowo przyjmuje się, iż inwestycja rozpoczyna się w chwili $t=0$, natomiast kończy w chwili $t=n$.
18. Zapisz na tablicy wartość obecną wpływów netto C_t określonych przez r -tą stopę procentową (zwaną wartością obecną netto inwestycji lub zdyskontowanym ciągiem płatności, NPV) wprowadzając wzór na $P(r)$:

$$P(r) = \left(\frac{1}{1+r}\right)^0 C_0 + \left(\frac{1}{1+r}\right)^1 C_1 + \dots + \left(\frac{1}{1+r}\right)^n C_n = C_0 + vC_1 + \dots + v^n C_n = \sum_{t=0}^n v^t C_t \quad (*),$$

gdzie $v = 1/(1+r)$ jest współczynnikiem dyskonta. Podaj kryterium odrzucenia, bądź akceptacji projektu na podstawie znaku $P(r)$: jeśli $P(r) < 0$, to projekt zazwyczaj odrzucamy, w przeciwnym przypadku projekt akceptujemy. Podkreśl, że jest to podstawowa miara pozwalająca ocenić decyzję inwestycyjną. Dodatkowo wprowadź określenie stopy zwrotu z inwestycji, czyli takiego r , dla którego $P(r) = 0$ (o ile takie r istnieje). Zauważ, że stopę zwrotu często utożsamia się z wewnętrzną stopą zwrotu (IRR), jeśli wartość obecna netto wpływów z inwestycji jest równa wartości obecnej netto poniesionych nakładów inwestycyjnych.

19. Wyjaśnij wprowadzone powyżej definicje na przykładzie:
zakładamy, że chcemy zrealizować 2-letni projekt inwestycyjny, w którym w kolejnych latach przewidujemy wartości zainwestowane oraz spodziewane w przyszłości przychody z inwestycji w jednostkach pieniężnych (np. zł) według schematu w tabeli:

Rok	Inwestycja	Przychody	C_t
0	100	0	-100
1	75	24	-51
2	0	220	220

Celem jest ocena opłacalności tego projektu na podstawie wewnętrznej stopy zwrotu.

Rozwiązanie:

zapisz postać wielomianu $P(r)$ z uwzględnieniem wielkości gotówki oraz wyznacz pierwiastki charakterystyczne wielomianu $P(r)$:

$$P(r) = -100 - 51(1/(1+r)) + 220(1/(1+r))^2 = -100 - 51v + 220v^2 \quad (\Delta = 90601).$$

Zaznacz, że tylko jedno z rozwiązań należy do dziedziny rozwiązań D_r ($v_1 = 0,8 \in D_r, v_2 = -0,5682 \notin D_r$). Wyznacz wartość IRR : $IRR = 1/v - 1 = 25\%$ oraz podkreśl, że przy tak dużej IRR inwestycja jest szczególnie opłacalna.

20. Zauważ, że IRR wyznaczana jest wyłącznie na podstawie strumienia pieniądza rozłożonego w czasie t . Wyjaśnij, że w przypadku kredytu bankowego niższa IRR (traktowana jako wskaźnik opłacalności inwestycji) jest pożądana z punktu widzenia kredytobiorcy, natomiast wyższa IRR jest pożądana w przypadku kredytodawcy. Zaznacz, że – w przypadku wyboru kilku inwestycji o jednakowym czasie trwania – IRR można traktować również jako wskaźnik opłacalności inwestycji. $IRR=0$ zinterpretuj jako przypadek braku zysku inwestora bądź pożyczkodawcy, natomiast $IRR < 0$ oznacza stratę inwestora. W przypadku $IRR < 0$ sens interpretacyjny ma jedynie r z przedziału: $-1 < r < 0$.
21. Zauważ, że wyznaczenie stopy zwrotu nie zawsze bywa jednoznaczne i pokaż to na kolejnym przykładzie: inwestor jest zobowiązany do wpłaty 100 j.p. natychmiast oraz 132 j.p. na koniec 2-go roku, a w zamian otrzyma 230 j.p. na koniec 1-szego roku ($t = 0, 1, 2$ oznacza kolejne lata). Zapisz równanie wartości: $100v^2 + 132v = 230v$ oraz wyznacz jego pierwiastki: $r_1 = 10\%$ lub $r_2 = 20\%$, zatem IRR jest wyznaczona niejednoznacznie. Podkreśl, że IRR można użyć do oceny tylko takiej inwestycji, w której równanie: $C_0 + vC_1 + \dots + v^n C_n = 0$ (**) ma dokładnie jedno dodatnie rozwiązanie. W przypadku wielomianu wyższego stopnia niż 2, zasugeruj sprowadzenie tego wielomianu do wielomianu wyższego stopnia niż 2, ewentualnie wykorzystaj funkcję IRR (zakres) w arkuszu kalkulacyjnym MS Excel (zakres oznacza adresy komórek arkusza zawierające wartości przepływów w kolejnych okresach inwestowania).
22. W ramach kółka matematycznego rozszerz badanie jednoznaczności rozwiązań powyższego równania o Regułę Kartezjusza, która mówi, że liczba dodatnich pierwiastków wielomianu o współczynnikach rzeczywistych jest nie większa od liczby zmian znaku w ciągu jego niezerowych współczynników i różni się od niej o liczbę parzystą. Stąd wyciągnij dwa wnioski: wniosek 1): jeśli w ciągu płatności C_t znak wyrazów tego ciągu zmienia się dokładnie jeden raz, wówczas istnieje dokładnie jedno dodatnie rozwiązanie, wniosek 2): warunkiem dostatecznym na istnienie $r \in (0,1)$ jako rozwiązania (**) w podpunkcie
21. jest spełnienie zależności: $-\sum_{t: C_t < 0} C_t < \sum_{t: C_t > 0} C_t$, gdzie „ t ”: $C_t < 0$ ” w indeksie Σ oznacza sumowanie po przepływach o wartościach $C_t < 0$ (inwestycjach).
23. Wprowadź definicję okresu zwrotu (*Payback Period, PP*) jako minimalnego okresu, po którym przychody (np. C_t , $t=1,2,\dots, n$) pokryją wydatki inwestycyjne (np. C_0). Określ dwa sposoby wyznaczenia *PP* w zależności od tego, czy a) wpływy są w równych odstępach czasowych, czy b) nie. W przypadku a) zdefiniuj *PP* jako $PP = k + q$, przy czym k wyznacz z zależności: $\sum_{t=1}^k C_t < C_0 \leq \sum_{t=1}^{k+1} C_t$, natomiast q z zależności: $C_0 - \sum_{t=1}^k C_t = qC_{k+1}$. W przypadku b) załóż, że wpływy następują w chwilach t_1, t_2, \dots, t_n ($k < n$) i wówczas *PP* wyznacz według zależności:
- $$PP = \min \left\{ k : C_0 \leq \sum_{t=0}^k C_t \right\}.$$
24. Na przykładzie pokaż działanie *PP* dla projektu inwestycyjnego, w którym nakłady inwestycyjne w chwili 0 wyniosły 10 000 zł (C_0), natomiast przychody na koniec kolejnego roku odpowiednio: $C_1 = 1000$, $C_2 = 2000$, $C_3 = 3000$, $C_4 = 5000$, $C_5 = 7000$.

Rozwiązanie:

W przypadku równomiernych w czasie wpływów: $\sum_{t=1}^3 C_t = 6000 < 10000 < 11000 = \sum_{t=1}^4 C_t$
PP wynosi 4 lata. W przypadku nierównomiernych zauważ, że $k=3$ oraz wyznacz różnicę $C_0 - \sum_{t=1}^3 C_t = 4000$, skąd $q = (C_0 - \sum_{t=1}^3 C_t) / C_4 = 4000 / 5000 = 0,8$, zatem $PP = 3,8$ roku.

25. Wprowadź pojęcie *indeksu rentowności (PI)*, który jest jedną z miar ustalania rankingu projektów o $NPV > 0$ w warunkach ograniczeń kapitału. Zdefiniuj PI jako iloraz sumy zdyskontowanych dodatnich przepływów ($C_t^+ = \max(0, C_t)$) do sumy zdyskontowanych ujemnych przepływów (C_t^-), czyli $PI = \frac{\sum_{t=0}^n \sqrt{C_t^+}}{\sum_{t=0}^n \sqrt{C_t^-}}$. Podkreśl, że im większa wartość PI, tym bardziej opłacalna inwestycja związana z tym PI oraz PI jest większe od 0 wtedy i tylko wtedy, gdy $NPV > 0$ (zatem tylko dla projektów o $NPV > 0$ wyznacza się PI).

Zadania

Zadanie nr 1 (stopa procentowa)

Bank oferuje dwie możliwości ulokowania kwoty 10 000,00 zł na dowolną liczbę lat:

- lokatę „1”, dla której stopa procentowa wynosi 5%, przy zastosowaniu oprocentowania prostego,
- lokatę „2”, dla której stopa procentowa wynosi 4,5%, przy zastosowaniu oprocentowania złożonego z roczną kapitalizacją odsetek.

Wyznacz dla każdej z lokat wartość kapitału końcowego oraz zdecyduj, która lokata jest bardziej opłacalna, przy okresie inwestycji wynoszącym: a) 2 lata, b) 5 lat, c) 10 lat.

Rozwiązanie:

- a) lokata „1”: $K_2 = 10\,000,00 \text{ zł} \cdot (1 + 0,05 \cdot 2) = 11\,000,00 \text{ zł}$; lokata „2”: $K_2 = 10\,000,00 \text{ zł} \cdot (1 + 0,045)^2 = 10\,920,25 \text{ zł}$; bardziej opłacalna jest lokata „1”.
- b) lokata „1”: $K_5 = 10\,000,00 \text{ zł} \cdot (1 + 0,05 \cdot 5) = 12\,500,00 \text{ zł}$; lokata „2”: $K_5 = 10\,000,00 \text{ zł} \cdot (1 + 0,045)^5 = 12\,461,82 \text{ zł}$; bardziej opłacalna jest lokata „1”.
- c) lokata „1”: $K_{10} = 10\,000,00 \text{ zł} \cdot (1 + 0,05 \cdot 10) = 15\,000,00 \text{ zł}$; lokata „2”: $K_{10} = 10\,000,00 \text{ zł} \cdot (1 + 0,045)^{10} = 15\,529,69 \text{ zł}$; bardziej opłacalna jest lokata „2”.

Zadanie nr 2 (dyskontowanie, wartość obecna)

Klient banku opisanego w zadaniu nr 1 zdecydował się założyć lokatę „2” na okres 9 lat. Bank proponuje klientowi, aby zmienić swój wybór na lokatę „3”, która również wymaga wpłaty 10 000,00 zł, gwarantując po upływie 9 lat wypłatę 14 800,00 zł. Czy klientowi opłaca się zmienić wybór z lokaty „2” na lokatę „3”? Przy rozwiązaniu wykorzystaj fakt, że mnożnik wartości obecnej dla okresu 9 lat i stopy procentowej 4,5% wynosi ok. 0,672904.

Rozwiązanie:

wartość obecna kwoty 14 800,00 zł płatnej za 9 lat wynosi:

$$PV = \left(\frac{1}{1 + 0,045} \right)^9 \cdot 14\,800,00 \text{ zł} \approx 0,672904 \cdot 14\,800,00 \text{ zł} = 9958,98 \text{ zł} < 10\,000,00 \text{ zł}$$

Klientowi nie opłaca się zmieniać lokaty „2” na lokatę „3”.

Zadanie nr 3 (stopa procentowa)

Institucja finansowa oferuje pożyczkę pieniędzy, oprocentowaną w ten sposób, że na koniec każdego miesiąca wartość długu przyrasta o 1% w stosunku do wartości z poprzedniego miesiąca. Sprawdź, czy warunki pożyczki zaoferowane przez tę instytucję finansową są zgodne z obowiązującymi w Polsce przepisami prawa regulującymi maksymalną wysokość odsetek.

Rozwiązanie:

opisany w treści zadania mechanizm oprocentowania powoduje, że po roku wartość długu będzie $(1 + 1\%)^{12} \approx 1,1268$ razy większa, co implikuje stopę procentową wynoszącą ok. 12,68%. Wartość tę należy porównać do maksymalnej dopuszczalnej przepisami prawa wysokości odsetek,

wynoszącej czterokrotność aktualnej stopy kredytu lombardowego Narodowego Banku Polskiego, której wysokość publikowana jest na stronie internetowej www.nbp.pl. Np. na dzień 9 I 2015 r. stopa lombardowa wynosiła 3%, w związku z tym $12,68\% > 12\%$, zatem warunki pożyczki nie są zgodne z obowiązującymi w Polsce przepisami prawa regulującymi maksymalną wysokość odsetek.

Zadanie nr 4 (IRR)

Bank oferuje lokatę, w której na początku okresu inwestycji 2-letniej należy wpłacić 9 zł, na początku kolejnego roku inwestycji 6 zł, aby w drugim roku uzyskać 24 zł. Janek zdecydował się na propozycję banku. Ile wyniesie wewnętrzna stopa zwrotu z jego inwestycji?

Rozwiązanie:

stwórz tabelkę przepływów (podobną do podanej w przykładzie pkt 19) i na jej podstawie zapisz równanie wartości: $-9-6v+24v^2=0$, skąd $\Delta=900$, $r_1 = 0.333 \in D_r$ oraz $r_2=-3 \notin D_r$. Zatem IRR w tym przypadku wynosi 33,33%.

Zadanie nr 5 (IRR – Excel lub wzory Cardano)

Inwestor dostał propozycję zainwestowania 100 zł na początku trwania inwestycji i uzyskiwania w kolejnych latach przychodów w wysokości odpowiednio: 30 zł, 60 zł oraz 150 zł. Czy inwestor skorzysta z takiej propozycji?

Rozwiązanie:

stwórz tabelkę przepływów, na podstawie której zapiszesz równanie wartości: $-100 + 30v + 60v^2 + 150v^3 = 0$. Skorzystaj z funkcji IRR w arkuszu kalkulacyjnym umieszczając po kolei wartości -100, 30, 60, 150, np. w komórkach arkusza: A1, A2, A3, A4, i wyliczając wartość w komórce A5 funkcją IRR, czyli: $=IRR(A1:A4)$ dającą w wyniku 44,002% lub korzystając ze wzorów Cardano: $\Delta=-6\ 487\ 560\ 000$, $v_1=0,6944$ oraz $IRR=44,002\%$, które $\in D_r$ (pozostałe dwa pierwiastki $\notin D_r$).

Zadanie nr 6 (oprocentowanie)

Trzy zakłady ubezpieczeń zaoferowały w tym samym czasie swoim klientom ubezpieczeniowe produkty inwestycyjne w formie ubezpieczenia na życie i dożycie, w których osoba optacająca składkę (ubezpieczający) otrzymuje świadczenie z tytułu dożycia obejmujące wartość wpłaconych składek (100%) oraz premię z tytułu zmiany wartości instrumentu bazowego – indeksu Z_{pkj3} , opartego na cenach surowców rolnych (zboża). Premia liczona jest jako procent wpłaconej składki. Jednak w każdym z produktów sposób liczenia procentu premii jest inny. Czas trwania umowy wynosi 2 lata, a rynek rolny (zbożowy) jest rynkiem wzrostowym i przewidywany jest jego dalszy wzrost. Początkowa wartość indeksu wynosi 100, a wartość indeksu w kolejnych kwartałach w ciągu 2 lat kształtuje się następująco: I kwartał – 102, II kwartał – 105, III kwartał – 103, IV kwartał – 107, V kwartał – 112, VI kwartał – 108, VII kwartał – 118, VIII kwartał – 125.

Sposób liczenia premii (premia wyliczana procentowo stanowi procent składki wpłaconej):

1) pierwszy produkt: za każdy kwartał liczona jest zmiana procentowa indeksu w stosunku do kwartału poprzedniego. W przypadku ujemnej zmiany procentowej wartości indeksu, zmiana za dany kwartał przyjmowana jest jako 0%. Po każdym roku wyliczana jest średnia ze zmian procentowych indeksu za każdy kwartał. Osiągnięta średnia zmiana procentowa indeksu po pierwszym roku sumowana jest ze średnią zmianą indeksu po drugim roku.

2) drugi produkt: za każdy kwartał liczona jest zmiana procentowa indeksu w stosunku do wartości początkowej indeksu. Końcowa premia obliczana jest jako średnia ze stóp zwrotu dla każdego kwartału.

3) trzeci produkt: końcowa premia obliczana jest jako średnia zmiana z wartości indeksów za trzy ostatnie kwartały (VI–VII kwartał). Za każdy z trzech kwartałów liczona jest zmiana procentowa indeksu w stosunku do wartości początkowej indeksu.

Porównaj trzy oferty i dokonaj wyboru tej najkorzystniejszej dla klienta. Oblicz, jaką wysokość premii uzyska ubezpieczający w każdym z produktów. Dla ułatwienia przedstaw sposób wyliczania premii w tabeli.

Rozwiązanie:

1) produkt pierwszy: końcowa wysokość premii wynosi $2,2\% + 5,0\% = 7,2\%$

Okres	Wartość indeksu Z_pkj3	Zmiana indeksu Z_pkj3
Wartość początkowa	100	
I kwartał	102	2,0%
II kwartał	105	2,9%
III kwartał	103	-1,9% (0%)
IV kwartał	107	3,9%
Średnia		2,2%
V kwartał	112	4,7%
VI kwartał	108	-3,6% (0%)
VII kwartał	118	9,3%
VIII kwartał	125	5,9%
Średnia		5,0%

Produkt drugi: końcowa wysokość premii wynosi 10% (średnia z procentowych zmian indeksów za 8 kwartałów).

Okres	Wartość indeksu Z_pkj3	Zmiana indeksu Z_pkj3
Wartość początkowa	100	
I kwartał	102	2%
II kwartał	105	5%
III kwartał	103	3%
IV kwartał	107	7%
V kwartał	112	12%
VI kwartał	108	8%
VII kwartał	118	18%
VIII kwartał	125	25%
Średnia		10%

Produkt trzeci: najkorzystniejszy jest produkt trzeci. Osiągnięta końcowa premia z produktu wynosi 17%.

Okres	Wartość indeksu Z_pkj3	Zmiana indeksu Z_pkj3
Wartość początkowa	100	
VI kwartał	108	8%
VII kwartał	118	18%
VIII kwartał	125	25%
Średnia		17%

Zadanie nr 7 (stopa zwrotu)

Panu Marcinowi zostały przedstawione oferty trzech ubezpieczeniowych produktów inwestycyjnych w formie umowy ubezpieczenia na życie i dożycie (tzw. ubezpieczeniowe produkty strukturyzowane). W ramach świadczenia z tytułu dożycia otrzyma on określoną kwotę stanowiącą procent składki wpłaconej plus premię określoną jako:

składka zainwestowana x max {0%; wskaźnik partycypacji x (wartość indeksu_{final} /wartość indeks_{initial} -1}

Przed zainwestowaniem jego składki pobrane mogą zostać także opłaty.

Produkt pierwszy:

świadczenie kwotowe wynosi 100% składki wpłaconej plus premia wyliczona według powyższego wzoru.

Składka zainwestowana równa jest składce wpłaconej, pomniejszonej o opłatę manipulacyjną w wysokości 5% wpłaconej składki.

Wskaźnik partycypacji wynosi 100%.

Początkowa wartość indeksu wynosi 100, końcowa 125.

Produkt drugi:

świadczenie kwotowe wynosi 100% składki zainwestowanej plus premia wyliczona według powyższego wzoru.

Składka zainwestowana równa jest składce wpłaconej, pomniejszonej o opłatę manipulacyjną w wysokości 4% wpłaconej składki.

Wskaźnik partycypacji wynosi 95%.

Początkowa wartość indeksu wynosi 105, końcowa 125.

Produkt trzeci:

świadczenie kwotowe wynosi 95% składki wpłaconej plus premia wyliczona według powyższego wzoru.

Składka zainwestowana równa jest składce wpłaconej, pomniejszonej o opłatę manipulacyjną w wysokości 0% wpłaconej składki.

Wskaźnik partycypacji wynosi 105%.

Początkowa wartość indeksu wynosi 100, końcowa 115.

Oszacuj, jaką stopę zwrotu uzyskał Pan Marcin poprzez ulokowanie swoich środków w wysokości 10 000 zł w poszczególne ubezpieczeniowe produkty strukturyzowane w formie umowy ubezpieczenia na życie i dożycie, i który z zaoferowanych produktów byłby dla niego najkorzystniejszy.

Rozwiązanie:

kalkulacja stopy zwrotu uzyskanej przez Pana Marcina:

$$StZw = [(WI_K / WI_P) - 1] * 100\%$$

gdzie:

StZw – uzyskana stopa zwrotu,

WI_K – wartość końcowa inwestycji,

WI_P – wartość początkowa inwestycji.

Produkt pierwszy:

Wartość początkowa inwestycji wynosi 10 000 zł.

Wartość końcowa inwestycji wynosi: świadczenie kwotowe w wysokości 10 000 zł plus premia 2375 zł = 12 375 zł. Stopa zwrotu wynosi 23,75%.

Produkt drugi:

Wartość początkowa inwestycji wynosi 10 000 zł.

Wartość końcowa inwestycji wynosi: świadczenie kwotowe w wysokości 9600 zł plus premia 1737,14 zł = 11 337,14 zł. Stopa zwrotu wynosi 13,37%.

Produkt trzeci:

Wartość początkowa inwestycji wynosi 10 000 zł.

Wartość końcowa inwestycji wynosi: świadczenie kwotowe w wysokości 9500 zł plus premia 1575 zł = 11 075 zł. Stopa zwrotu wynosi 10,75%.

Najkorzystniejszy jest produkt pierwszy ze względu na najwyższą stopę zwrotu.

Podręczny słownik pojęć i skrótów

Indeks rentowności (z ang. *Profitability Index*) – zwany również wskaźnikiem zyskowności/rentowności inwestycji; jedno z kryteriów oceny inwestycji, wyrażone ilorazem sumy zdyskontowanych dodatnich przepływów pieniężnych do sumy zdyskontowanych ujemnych przepływów pieniężnych.

Instrument bazowy – obserwowalna zmienna (np. wartość indeksu, wysokość stóp procentowych, indeksy giełdowe, ale także zmienne niefinansowe), od której zależy wycena instrumentu finansowego zwanego instrumentem pochodnym (np. opcji).

Inwestycja (finansowa) – zaangażowanie środków gospodarczych (finansowych) w przedsięwzięcie gospodarcze mające na celu pomnożenie zainwestowanych środków. Inwestycja może być obciążona wysokim ryzykiem i wiązać się z utratą dużej części zainwestowanych środków.

j.p. – jednostka pieniężna (np. PLN, USD, Euro).

Odsetki – dochód z udostępnienia bankowi środków pieniężnych z tytułu depozytu/lokaty lub koszt pozyskania środków pieniężnych w formie kredytu/pożyczki. Ich wysokość zależy od oprocentowania ustalonego pomiędzy stronami umowy lokaty lub umowy kredytu/pożyczki.

Okres zwrotu (z ang. *Payback Period, PP*) – czas, jaki jest niezbędny do tego, aby nakłady poniesione na realizację określonego przedsięwzięcia inwestycyjnego zostały w pełni pokryte korzyściami netto wygenerowanymi przez tę inwestycję.

Opcja – jest instrumentem finansowym zaliczanym do instrumentów pochodnych (derywatów), który daje prawo do kupna (opcja kupna) lub prawo do sprzedaży (opcja sprzedaży) instrumentu podstawowego po ustalonej cenie (jest to tzw. cena wykonania) w okresie do ustalonego terminu (zwanego terminem wygaśnięcia). Posiadacz opcji uzyskuje prawo do kupna lub sprzedaży, zaś wystawiający opcję przyjmuje na siebie zobowiązanie do sprzedaży lub kupna, w zależności od rodzaju opcji. Posiadacz opcji przyjmuje w kontrakcie tzw. długą pozycję, zaś wystawiający opcję tzw. krótką pozycję.

Oprocentowanie – stopa procentowa podawana w skali rocznej, określająca wysokość odsetek od depozytu, które otrzyma depozytariusz lub odsetek od pożyczki/kredytu, które będzie płacić pożyczkobiorca/kredytobiorca.

Oszczędzanie – angażowanie posiadanych środków finansowych w celu osiągnięcia dochodu bez ponoszenia nadmiernego ryzyka.

Produkty strukturyzowane – instrumenty finansowe stworzone, złożone, wyemitowane i oferowane inwestorom w celu spełnienia ich specyficznych wymogów inwestycyjnych. Produkty strukturyzowane powstają najczęściej przez połączenie cech instrumentów klasycznych (np. obligacji) oraz instrumentów pochodnych (najczęściej opcji).

Stopa zwrotu – miara określająca zyskowność inwestycji; obliczana jako stosunek zysku osiągniętego z inwestycji do zaangażowanych środków finansowych.

Ubezpieczenie strukturyzowane – potoczna nazwa umowy ubezpieczenia na życie i dożycie lub umowy ubezpieczenia na życie z ubezpieczeniowym funduszem kapitałowym, w których świadczenie ubezpieczyciela jest ustalone w stosunku do określonych indeksów lub innych wartości bazowych.

Wartość obecna netto inwestycji (z ang. *Net Present Value, NPV*) – suma zdyskontowanych na początek inwestycji nakładów poniesionych oraz uzyskanych (spodziewanych) przychodów przy ustalonej stopie procentowej i .

Wewnętrzna stopa zwrotu (z ang. *Internal Rate of Return, IRR*) – jedna z metod oceny efektywności ekonomicznej projektów inwestycyjnych uwzględniająca zmianę wartości pieniądza w czasie i pokazująca rzeczywistą stopę zwrotu z inwestycji.

Współczynnik partycypacji (wskaźnik udziału w zysku) – procentowy wskaźnik udziału inwestora w zmianie instrumentu bazowego (najczęściej w jego wzroście), podawany procentowo.

KREDYT BANKOWY W PIGUŁCE MATEMATYCZNEJ

Etap edukacyjny: szkoła ponadgimnazjalna

Przedmiot: podstawy przedsiębiorczości

Podstawa programowa kształcenia ogólnego:

Podstawy przedsiębiorczości:

Instytucje rynkowe – Uczeń:

- 1) rozróżnia formy i funkcje pieniądza;
- 2) wyjaśnia rolę, jaką w gospodarce pełnią instytucje rynkowe: bank centralny, banki komercyjne, giełda papierów wartościowych, fundusze inwestycyjne, firmy ubezpieczeniowe, fundusze emerytalne;
- 3) oblicza procent od kredytu i lokaty bankowej, ocenia możliwość spłaty zaciągniętego kredytu przy określonym dochodzie;
- 4) rozróżnia formy inwestowania kapitału i dostrzega zróżnicowanie stopnia ryzyka w zależności od rodzaju inwestycji i okresu inwestowania;
- 5) oblicza przewidywany zysk z przykładowej inwestycji kapitałowej w krótkim i długim okresie;
- 6) analizuje oferty banków, funduszy inwestycyjnych, firm ubezpieczeniowych i funduszy emerytalnych.

Cel zajęć: Uczeń:

- wyjaśnia co to jest kredyt bankowy,
- wie, na co trzeba zwracać uwagę pożyczając pieniądze z banku,
- umie obliczyć, jakie będą koszty wziętego kredytu w banku,
- umie obliczyć, na jaki czas powinien wziąć kredyt i jaką może mieć ratę adekwatnie do posiadanego budżetu domowego.

Pojęcia kluczowe: kredyt, pożyczka, oprocentowanie kredytu, koszty kredytu, dochód, zdolność kredytowa, odsetki, RRSO, spłata kredytu.

Metody: praca w grupach, dyskusja, burza mózgów, prezentacja.

Materiały:

- Prezentacja Power Point „Kredyt bankowy w pigułce matematycznej” opublikowana na stronie internetowej Komisji Nadzoru Finansowego (KNF);
- *Czy rata mojego kredytu nie jest za wysoka? Podstawy matematyki finansowej*, P. Śliwka, publikacja edukacyjna wydana nakładem KNF w 2013 roku, dostępna również w wersji elektronicznej na stronie internetowej KNF (www.knf.gov.pl);
- inne scenariusze lekcji odnoszące się do kredytu zamieszczone w niniejszej publikacji oraz w publikacji *Scenariusze lekcji z zakresu rynku finansowego z zadaniami matematycznymi i logicznymi z odpowiedziami dla szkół gimnazjalnych i ponadgimnazjalnych* wydanej w 2015 roku nakładem KNF, dostępnych również w wersji elektronicznej na stronie internetowej KNF (www.knf.gov.pl);
- film animowany „Kredyty” – opublikowany na stronie internetowej Narodowego Banku Polskiego (www.nbp.gov.pl).

Przebieg zajęć:

1. Przedstaw uczniom cel zajęć – co każdy powinien wiedzieć myśląc o wzięciu kredytu lub biorąc go.
2. Obejrzyjcie film „Kredyty” – link-słajd 2 Prezentacji. Porozmawiajcie o tym, dlaczego bierzemy kredyty i czy rzeczywiście ich potrzebujemy.

3. Korzystając ze slajdów 3–5 z Prezentacji omów z uczniami, co to jest kredyt, czym się różni od pożyczki i jakie są rodzaje kredytów.
4. Przedstaw uczniom rodzaje kredytów – Prezentacja slajdy 6–13.

Według kryterium przedmiotu kredytowania kredyty dzielą się na:

- konsumpcyjne – udzielane na określone potrzeby osób, a ich spłata jest indywidualnie ustalana z bankiem;
- obrotowe – przeznaczone na finansowanie bieżącej działalności przedsiębiorstwa, na przykład pokrycie części kosztów zatrudnienia personelu, kosztów administracyjnych, zakupu drobnego wyposażenia itp.;
- inwestycyjne – przeznaczone na finansowanie realizowanych przez kredytobiorcę przedsięwzięć, których celem jest odtworzenie, modernizacja lub powiększenie wartości majątku trwałego, jak również zakup wartości niematerialnych i prawnych bądź nabycie udziałów w przedsiębiorstwach lub długoterminowych papierów wartościowych;
- na finansowanie projektów inwestycyjnych – przeznaczone są na finansowanie projektów wspieranych środkami z budżetu Unii Europejskiej.

Według kryterium formy i rodzaju kredytu:

- w rachunku bieżącym – umożliwia firmie zadłużenie się do ustalonego w umowie limitu debetowego w tym rachunku;
- w rachunku kredytowym – polega na założeniu przez bank rachunku kredytowego przypisanego do danego kredytobiorcy, na którym są ewidencjonowane wszystkie wypłaty dokonywane przez bank w ramach udzielonego kredytu.

Lub

- gotówkowy – jest to kredyt udzielany w gotówce na dowolny cel;
- mieszkaniowy – przeznaczony jest na remont lub zakup mieszkania lub domu;
- studencki – kredyt na preferowanych warunkach, udzielany wszystkim studentom, bez względu na rodzaj uczelni (publiczne i niepubliczne) oraz tryb studiów, pod warunkiem, że rozpoczęli studia przed ukończeniem 25. roku życia;
- samochodowy – przeznaczony na zakup samochodu;
- inwestycyjny – przeznaczany na finansowanie realizowanych przez kredytobiorcę przedsięwzięć, których celem jest odtworzenie, modernizacja lub powiększenie wartości majątku trwałego, jak również zakup wartości niematerialnych i prawnych bądź nabycie udziałów w przedsiębiorstwach lub długoterminowych papierów wartościowych;
- lombardowy – jest udzielany jednostkom gospodarczym pod zastaw ruchomości, w tym głównie papierów wartościowych, towarów, metali szlachetnych;
- leasing – w ramach leasingu jedna ze stron umowy (finansujący, leasingodawca) przekazuje drugiej stronie (korzystającemu, leasingobiorcy) prawo do korzystania z określonej rzeczy na pewien uzgodniony w umowie leasingu okres, w zamian za ustalone ratalne opłaty (raty leasingowe).

Podział według okresu kredytowania:

- krótkoterminowe – udzielane na okres do 1 roku;
- średnioterminowe – udzielane na okres od 1 roku do 3 lat;
- długoterminowe – udzielane na okres od 3 lat.

Podział kredytów według kryterium kredytobiorcy:

- konsumpcyjne – udzielane na określone potrzeby osób, a ich spłata jest indywidualnie ustalana z bankiem;
- na finansowanie działalności gospodarczej – udzielane dla klientów prowadzących działalność gospodarczą, czyli przedsiębiorcom oraz małym lub średnim przedsiębiorcom.

Podział kredytów według waluty kredytu:

- złotowe – udzielane w złotych polskich;
- walutowe – udzielane w walucie obcej: EUR, USD, CHF.

Podział według kryterium sposobu zabezpieczenia:

- *zabezpieczone osobiście – zabezpieczenie osobiste charakteryzuje się odpowiedzialnością osobistą kredytobiorcy oraz innych dłużników;*
- *zabezpieczone rzeczowo – do zabezpieczeń rzeczowych należy zaliczyć: zastaw, hipotekę (tj. wpis wierzytelności do księgi wieczystej danej nieruchomości, który daje bankowi prawo dochodzenia roszczeń z tej nieruchomości), klauzulę potrącenia (wierzytelności z rachunku kredytobiorcy), kaucję (określoną sumę pieniędzy, która ma za zadanie zabezpieczyć roszczenia w razie niewywiązania się z umowy), blokadę środków na rachunku bankowym (jedynie do czasu, aż kredytobiorca wywiąże się z określonych zobowiązań względem wierzyciela), przywłaszczenie na zabezpieczenie (polegające na przeniesieniu przez kredytobiorcę prawa własności swojej rzeczy na wierzyciela), ubezpieczenie kredytu oraz pełnomocnictwo do zarządzania rachunkiem bankowym;*
- *niezabezpieczone – nie wymagają od klientów zastawiania jakichkolwiek posiadanych rzeczy pod depozyt zabezpieczający.*

Podział kredytów według oprocentowania:

- *o stałym oprocentowaniu – oprocentowanie nie zmienia się podczas całego okresu kredytowego;*
- *o zmiennym oprocentowaniu – oprocentowanie może się zmienić podczas okresu kredytowego, np. z powodu zmian stóp procentowych przez NBP.*

Podział według preferencyjności:

- *komercyjne – przyznane na zakup nieruchomości komercyjnej, środków transportu, sprzętu biurowego;*
 - *preferencyjne – kredyty, w których część kosztów ponosi za kredytobiorcę Skarb Państwa.*
5. Omów z uczniami, co jest ważne przy podejmowaniu decyzji o kredycie – Prezentacja slajd 14.
 6. „W poszukiwaniu najlepszej oferty” – omów z uczniami wszystkie elementy oferty, jakie powinniśmy poznać poszukując najlepszej oferty kredytu. Prezentacja slajd 15.
 7. Przykład, jak sprawdzić ofertę „Kredyt 0%”. Omawiamy z uczniami, jak powinien wyglądać harmonogram spłaty prawdziwego kredytu 0%. Wysokość kredytu dzielimy na liczbę miesięcy, przez które chcemy spłacać kredyt. Przy kredycie rzeczywiście bez opłat wysokość raty będzie wynikiem dzielenia kredytu przez liczbę miesięcy. Jeżeli jest jakaś dodatkowa opłata, jako kwota do spłaty będzie podana wyższa kwota i należy dowiedzieć się, o co powiększona jest ta kwota. Automatycznie raty będą wyższe. Jeżeli w reklamie podane jest „Kredyt z oprocentowaniem 0%”, to jest możliwe, że dodana zostanie prowizja za udzielenie kredytu lub ubezpieczenie do kredytu – należy o to zapytać. Natomiast jeżeli proponowany jest „Kredyt wszystko za 0” – rata powinna być wynikiem działania opisanego powyżej. Prezentacja slajd 16.
 8. Omów z uczniami, co to jest oprocentowanie kredytu, wskaż, że jest to najważniejsza część kredytu.

Oprocentowanie to główny koszt kredytu. Im dłuższy okres kredytowania, tym więcej zapłacimy bankowi z tytułu odsetek.

Podstawowe zasady naliczania odsetek od kredytu:

- *oprocentowanie kredytu jest zawsze podawane w stosunku rocznym, tzn. określa oprocentowanie za rok (12 miesięcy),*
- *raty płacone są miesięcznie,*
- *w każdym miesiącu bank ustala, jaki kapitał pozostał do spłaty, i od tego kapitału oblicza odsetki, biorąc pod uwagę roczną stopę procentową oraz liczbę dni w danym miesiącu (gdy np. w danym miesiącu jest 31 dni, odsetki będą wyższe niż gdy w miesiącu jest np. 28 lub 30 dni). Do obliczeń zwykle przyjmuje się, że rok ma 365 dni – w przypadku, gdy spłacamy kredyt w systemie rat równych, kwota raty zawierać będzie kwotę obliczonych odsetek, a pozostała część będzie stanowić spłatę kapitału. Łatwo obliczyć, że w krótszych*

- miesiącach (w lutym i w miesiącach 30-dniowych) udział kapitału w racie będzie wyższy niż w miesiącach dłuższych (31-dniowych),*
- w przypadku rat malejących, kwota odsetek zostaje doliczona do stałej kwoty kapitału, spłacanej co miesiąc,
 - raty równe stosowane są najczęściej i one będą przedmiotem wyliczenia.
- Prezentacja slajd 17.
9. Przedstaw przykładowe obliczenie odsetek od kredytu. Prezentacja slajd 18.
Kapitał wielkości 100 000 zł, czyli tyle pożyczamy od banku. Oprocentowanie kredytu wynosi 7%, a odsetki naliczone zostają za styczeń (miesiąc 31-dniowy).

$$\text{Odsetki} = 100\,000 \text{ zł} * 0,07 (7\%) * 31 (\text{dni stycznia}) / 365 (\text{dni w roku}) = 594,52 \text{ zł}.$$
Każda rata kredytu składa się z części kapitału, czyli pożyczonego kredytu oraz odsetek za pożyczony kredyt.
W przypadku spłacania powyższego kredytu w systemie rat równych w okresie 20 lat, rata miesięczna wyniesie 775,30 zł (według kalkulatora kredytowego, na podstawie którego otrzymamy wydruk spłat). Tak więc udział kapitału w racie styczniowej wyniesie:

$$775,30 \text{ zł} - 594,52 \text{ zł} = 180,78 \text{ zł}.$$
Z kolei w lutym (28 dni) odsetki wyniosą:

$$\text{Odsetki} = 100\,000 \text{ zł} * 0,07 (7\%) * 28 (\text{dni lutego}) / 365 (\text{dni roku}) = 536,99 \text{ zł},$$
a udział kapitału w racie równej wyniesie:

$$775,30 \text{ zł} - 536,99 \text{ zł} = 238,31 \text{ zł}.$$
10. Przedstaw przykład wyliczenia raty kredytu. Prezentacja slajd 19.
„Załóżmy, że weźmiemy kredyt w wysokości 10 000 zł na okres 12 miesięcy z oprocentowaniem 8% w skali roku. Ile wyniesie jedna rata?”

$$10\,000 * 8\% = 800 / 12 (\text{miesiący}) = 66,67 \text{ wysokość odsetek za miesiąc}$$

$$10\,000 / 12 (\text{miesiący}) = 833,33 \text{ rata kapitałowa}$$

$$833,33 + 66,67 = 900 \text{ zł rata miesięczna}$$
Inny sposób liczenia:

$$10\,000 (1 + 0,08) = 10\,800 \text{ zł}$$

$$10\,800 / 12 (\text{miesiący}) = 900 \text{ zł}.$$
11. Omów z uczniami, jakie czynniki brane są pod uwagę przez bank podczas ubiegania się o kredyt, zachęć do dyskusji dlaczego są one ważne: dochód na członka rodziny, rodzaj umowy o pracę, stan cywilny, inne kredyty, dotychczasowe wywiązanie się z obowiązków spłaty zobowiązań, wpis do Biura Informacji Kredytowej. Prezentacja slajd 20.
12. Przedstaw uczniom zasady udzielania kredytu:
- klient musi mieć zdolność kredytową,
 - klient przedstawia zaświadczenie z zakładu pracy o zarobkach,
 - w przypadku mężczyzny w wieku poborowym potrzebna jest książeczka wojskowa,
 - bank robi symulację komputerową,
 - jeżeli klient ma zdolność kredytową, może złożyć wniosek o udzielenie kredytu,
 - jeżeli to kredyt hipoteczny, to rzeczoznawca dokonuje wyceny nieruchomości klienta,
 - analityk podejmuje decyzję: pozytywną lub negatywną,
 - przy decyzji pozytywnej bank przygotowuje umowę kredytową,
 - klient dostaje harmonogram spłat, do którego dnia każdego miesiąca musi uiścić należności za raty i odsetki,
 - kredyt konsumpcyjny jest spłacany maksymalnie do 10 lat,
 - kredyt hipoteczny spłacany jest od 6 do 35 lat,
 - za nieterminowe spłaty rat bank nalicza odsetki karne. Prezentacja slajd 21.
13. Zaproponuj uczniom rozwiązanie pięciu zadań związanych z wyliczeniem kosztów kredytu. Najpierw przedstaw treść zadania, daj czas na rozwiązanie w grupach 2-osobowych, a na-

stępnie poproś uczniów o prezentację wyników i porównajcie to z rozwiązaniami na slajdach. Prezentacja slajdy 22–31.

Zadanie 1:

Jaka będzie suma odsetek od kredytu w wysokości 6000 zł, zaciągniętego na 6 miesięcy z oprocentowaniem rocznym 15%?

$$15\% = 0,15$$

$$0,15 / 12 \text{ (miesiące)} = 0,0125$$

$$0,0125 \times 6 \text{ (kredyt zaciągnięty na 6 miesięcy)} = 0,075$$

$$6000 \times 0,075 = 450 \text{ zł}$$

Zadanie 2:

Oblicz sumę odsetek od dwuletniego kredytu w wysokości 18 000 zł ze stopą procentową równą 18%.

$$18\% = 0,18$$

$$18\ 000 \times 0,18 = 3240 \text{ zł odsetki za 1 rok}$$

$$3240 \times 2 \text{ (lata)} = 6480 \text{ zł odsetki za 2 lata}$$

Zadanie 3:

Zatóżmy, że bierzesz z banku pożyczkę w wysokości 3200 zł na 10 miesięcy przy rocznym oprocentowaniu 8%. Jaką ratę zapłacisz?

$$3200/10 = 320 \text{ zł miesięczna rata kapitałowa}$$

$$8\% = 0,08$$

$$0,08/12 = 0,0067$$

$$3200 \times 0,0067 = 21,44 \text{ zł miesięczna kwota odsetek}$$

$$320 + 21,44 = 341,44 \text{ zł wysokość raty miesięcznej}$$

Zadanie 4:

Ile trzeba będzie zwrócić bankowi, jeżeli weźmiemy kredyt w wysokości 25 000 zł na okres 3 lat, oprocentowany w skali roku 14%?

$$14\% = 0,14$$

$$25000 \times (1 + 0,14)^3 = 25\ 000 \times 1,48 = 37\ 000 \text{ zł}$$

Zadanie 5:

Maksymilian będzie spłacać przez 2 lata kredyt w wysokości 10 000 zł w miesięcznych ratach. Jeżeli rata wyniosła 526 zł, to jakie jest oprocentowanie kredytu w skali roku?

$$10\ 000 / 24 \text{ (miesiące)} = 416,67 \text{ zł – kapitałowa rata miesięczna}$$

$$526 - 416,67 = 109,33 \text{ – odsetkowa rata miesięczna}$$

$$109,33 / 10\ 000 = 0,011$$

$$0,011 \times 12 = 0,13 = 13\% \text{ roczne oprocentowanie}$$

14. Jako podsumowanie zaproponuj uczniom wykonanie ćwiczenia. Poproś, żeby najpierw samodzielnie pofaczyli nazwę z definicją. Potem sprawdźcie, czy wszyscy dobrze je dopasowali. Prezentacja slajdy 32–33.

Uczniowie VIII Liceum Ogólnokształcącego im. Władysława IV w Warszawie, którzy wzięli udział w projekcie edukacyjnym UKNF polegającym na dokonaniu oceny scenariuszy lekcji oraz udziale w warsztatach zorganizowanych w dniu 11 marca 2015 r. w Urzędzie Komisji Nadzoru Finansowego.

1. Borowski Filip
2. Fedorczyk Joanna
3. Fidelangeli Laura
4. Godek Grażyna
5. Gradzi Jakub
6. Justyniarska Marta
7. Kałuża Marta
8. Klepaczewska Weronika
9. Kolbusz Aleksandra
10. Kozyra Martyna
11. Kruszewska Maria
12. Kuczborski Piotr
13. Kusal Patryk
14. Liszewski Maciej
15. Majkowski Przemysław
16. Mazzoll Zuzanna
17. Miłek Anna
18. Osuch Jakub
19. Pap Piotr
20. Petrykowski Kenneth
21. Piesio Paulina
22. Pikus Konstancja
23. Rozbicka Kinga
24. Rutkowski Michał
25. Rzycka Julia
26. Serafińska Marta
27. Siekierzyński Wojciech
28. Skłodowska Agata
29. Skłodowski Jakub
30. Walczuk Daria
31. Wilczyński Michał
32. Wiśniewski Rafał
33. Wojtecka Barbara
34. Zdziera Michał

Wysoki poziom merytoryczny scenariuszy, właściwy dobór tematów, zadań i ćwiczeń, jasny i przejrzysty język przekazu oraz możliwości praktycznego zastosowania zdobytej wiedzy sprawiają, że scenariusze stają się atrakcyjną „odskocznia” od tradycyjnych, teoretycznych zagadnień, podejmowanych na lekcjach matematyki.

Mariusz Włodarczyk

Koordinator Programu edukacyjnego
Urzędu Komisji Nadzoru Finansowego
w VIII Liceum Ogólnokształcącym
im. Władysława IV w Warszawie

Komisja Nadzoru Finansowego
Pl. Powstańców Warszawy 1
Skr. poczt. nr 419, 00-950 Warszawa 1
Tel. (+48) 22 262 50 00
Fax (+48) 22 262 51 11
knf@knf.gov.pl
www.knf.gov.pl



ISBN 978-83-63380-77-9