Zadanie 1.

Urna zawiera 5 kul o numerach: 0, 1, 2, 3, 4. Z urny ciągniemy kulę, zapisujemy numer i kulę wrzucamy z powrotem do urny. Czynność tę powtarzamy, aż kula z każdym numerem zostanie wyciągnięta co najmniej raz. Oblicz wartość oczekiwaną liczby powtórzeń.

(A) 17

(B) 21

(C) $10\frac{5}{12}$

(D) $7\frac{5}{12}$

(E) $11\frac{5}{12}$

Zadanie 2.

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu jednostajnego na przedziale $(0,\theta)$, gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Rozważamy estymator T_n parametru θ postaci

$$T_n = (n+1)\min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}\ .$$

Jeżeli $\theta = 1$, to dla każdego $\varepsilon \in (0,1)$ granica $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\left|T_n - 1\right| > \varepsilon\right)$ jest równa

(A) 0

(B) $1 - e^{\varepsilon-1} + e^{-\varepsilon-1}$

(C) 1

(D) $1 - e^{\varepsilon-1}$

(E) $1 - e^{\varepsilon-1} - e^{-\varepsilon-1}$

Zadanie 3.

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu normalnego o wartości oczekiwanej 0 i nieznanej wariancji σ^2. Rozważamy estymatory odchylenia standardowego σ postaci $\hat{\sigma}_c = c\sum_{i=1}^{n}|X_i|$. Niech $\hat{\sigma}_{\bar{c}}$ oznacza estymator o najmniejszym błędzie średniokwadratowym w klasie rozważanych estymatorów. Wtedy $\bar{c}$ jest równe

A) $\dfrac{2\sqrt{2\pi}}{2\pi + n - 1}$

(B) $\dfrac{1}{n-1}$

(C) $\dfrac{1}{n}$

(D) $\dfrac{\sqrt{2\pi}}{\pi + 2n - 2}$

(E) $\dfrac{\sqrt{2\pi}}{\pi + 2n}$

Zadanie 4.

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots,\ I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots, N$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi. Zmienne $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ mają rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej 1. Zmienne $I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$ mają rozkład dwupunktowy $P(I_i = 1) = 1 - P(I_i = 0) = \frac{1}{2}$.

Zmienna N ma rozkład ujemny dwumianowy $P(N = n) = \binom{n+1}{n}\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^n$ dla $n = 0,1,2,\ldots$.

Niech $S_N = \begin{cases} 0 & gdy\ \ N = 0 \\ \sum_{i=1}^{N} I_i X_i & gdy\ \ N > 0 \end{cases}$.

Wtedy współczynnik zmienności $\frac{\sqrt{Var(S_N)}}{ES_N}$ jest równy

(A) $\sqrt{\frac{9}{2}}$

(B) $\sqrt{\frac{7}{2}}$

(C) $\sqrt{\frac{13}{2}}$

(D) $\sqrt{\frac{7}{6}}$

(E) $\sqrt{\frac{17}{2}}$

Zadanie 5.

Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładów o gęstościach

$$f_X(x) = \begin{cases} 32x^2 e^{-4x} & \text{gdy} \quad x > 0 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$$

$$f_Y(x) = \begin{cases} 16xe^{-4x} & \text{gdy} \quad x > 0 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Wtedy $E(X - Y \mid X + Y = s)$ jest równa

(A) 0

(B) $\frac{1}{4}s$

(C) $\frac{1}{5}s$

(D) $\frac{2}{5}s$

(E) $\frac{3}{4}s$

Zadanie 6.

Niech $X_1, X_2, ..., X_8$ będzie próbką z rozkładu prawdopodobieństwa Pareto o dystrybuancie

$$F_\theta(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^\theta} & dla\ \ x \ge 1; \\ \\ 0 \quad dla\ x < 1, \end{cases}$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem.
Rozpatrzmy zadanie testowania hipotezy $H_0 : \theta = 4$ przeciwko alternatywie $H_1 : \theta = 2$. Zbudowano taki test, dla którego *suma* prawdopodobieństw błędów I i II rodzaju, oznaczanych odpowiednio przez α i β, jest najmniejsza. Oblicz tę najmniejszą wartość $\alpha + \beta$.

(A) 0,2668

(B) 0,3336

(C) 0,8075

(D) 0,1000

(E) 0,3667

Zadanie 7.

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie o nieznanej medianie *m*. Budujemy przedział ufności dla parametru *m* postaci $[X_{3:10}, X_{7:10}]$, gdzie $X_{k:10}$ oznacza *k*-tą statystykę pozycyjną z próby $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$. Prawdopodobieństwo $P(m \in [X_{3:10}, X_{7:10}])$ jest równe

(A) $\frac{114}{128}$

(B) $\frac{121}{128}$

(C) $\frac{99}{128}$

(D) $\frac{115}{128}$

(E) $\frac{120}{128}$

Zadanie 8.

Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie Weibulla o gęstości

$$f_\theta(x) = \begin{cases} 3\theta x^2 \exp(-\theta x^3) & \text{gdy } x > 0 \\ 0 & \text{gdy } x \le 0 \end{cases},$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem.

Niestety nie obserwujemy zmiennej X, ale zmienną Y równą $X - 1$, gdy $X > 1$. W wyniku tych obserwacji otrzymujemy prostą próbę losową $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{10}$ (nie wiemy ile razy pojawiły się wartości zmiennej X z przedziału $(0,1]$) i na jej podstawie wyznaczamy estymator największej wiarogodności $\hat{\theta}$ parametru θ.

Dobierz stałą c tak, aby zachodziła równość

$$P_\theta(\theta < c\hat{\theta}) = 0{,}95$$

(A) 6,28

(B) 1,83

(C) 3,14

(D) 1,57

(E) 3,06

Zadanie 9.

Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ są niezależne o jednakowym rozkładzie

$$P(X_n = 1) = P(X_n = 2) = P(X_n = 3) = P(X_n = 4) = \frac{1}{4}.$$

Niech $Y_0 = 2$ oraz niech dla $n = 1,2,3,\ldots$ zachodzi

$$Y_n = \begin{cases} 4 & gdy \quad X_n = 4 \\ \min(Y_{n-1}, X_n) & gdy \quad X_n < 4 \end{cases}$$

Oblicz $\lim_{n \to +\infty} P(Y_n \le 3)$

(A) $\frac{1}{3}$

(B) $\frac{3}{4}$

(C) $\frac{1}{4}$

(D) $\frac{1}{2}$

(E) $\frac{2}{3}$

Zadanie 10.

Zakładamy, że zależność czynnika Y od czynnika x (nielosowego) opisuje model regresji liniowej $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$, gdzie błędy ε_i są niezależne i mają rozkłady normalne o wartości oczekiwanej 0 i wariancji 1. Obserwujemy zmienne losowe $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ przy danych wartościach $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Test najmocniejszy dla weryfikacji hipotezy
$H_0: \ \beta_0 = 0$ i $\beta_1 = 1$
przy alternatywie
$H_1: \ \beta_0 = -1$ i $\beta_1 = 2$
na poziomie istotności 0,05 odrzuca hipotezę H_0, gdy spełniona jest nierówność

(A) $$\frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - x_i)(x_i - 1)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(1 - x_i)^2}} > 1{,}645$$

(B) $$\frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - 1)(x_i - 1)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(1 - x_i)^2}} > 1{,}645$$

(C) $$\frac{\sum_{i=1}^{n}Y_i(x_i - 1)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(1 - x_i)^2}} > 1{,}645$$

(D) $$\frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - x_i)(1 - x_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(1 - x_i)^2}} > 1{,}645$$

(E) $$\frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - 1)(1 - x_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(1 - x_i)^2}} > 1{,}645$$

Egzamin dla Aktuariuszy z 20 czerwca 2011 r.

Prawdopodobieństwo i statystyka

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ : ....K L U C Z   O D P O W I E D Z I...............................

~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	E	
2	B	
3	D	
4	C	
5	C	
6	B	
7	C	
8	D	
9	B	
10	A	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.
♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.