Zadanie 1

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_6$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu jednostajnego na przedziale $(0, \theta_1)$, a $Y_1, Y_2, \ldots, Y_6$ niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu jednostajnego na przedziale $(0, \theta_2)$, gdzie θ_1, θ_2 są nieznanymi parametrami dodatnimi. Wszystkie zmienne są niezależne. Weryfikujemy hipotezę $H_0: \theta_1 = \theta_2$ przy alternatywie $H_1: \theta_1 = 2\theta_2$ testem o obszarze krytycznym

$$K = \left\{ \frac{\max\{X_1, X_2, \ldots, X_6\}}{\max\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_6\}} > c \right\},$$

gdzie c jest stałą dobraną tak, by test miał rozmiar 0,1.
Moc tego testu jest równa

(A) 0,972

(B) 0,961

(C) 0,998

(D) 0,950

(E) 0,765

Zadanie 2

Niech zmienna losowa S_n będzie liczbą sukcesów w n $(n > 1)$ próbach Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu p. O zdarzeniu losowym A wiemy, że

$$\Pr(A \mid S_n = k) = a\frac{k}{n} \quad \text{dla} \quad k = 0,1,\ldots,n,$$

gdzie a jest znaną liczbą, $0 < a \le 1$. Oblicz $E(S_n \mid A)$.

(A) $pn + 1 - p$

(B) $ap(n+1)$

(C) $p(n-1)$

(D) $pn + 1$

(E) $apn + 1$

Zadanie 3

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu normalnego o nieznanej wartości oczekiwanej μ i nieznanej wariancji σ^2. Niech T oznacza estymator nieobciążony o minimalnej wariancji parametru μ^2. Wtedy błąd średniokwadratowy tego estymatora, czyli

$$E_{\mu,\sigma}\left(T - \mu^2\right)^2$$

jest równy

(A) $\dfrac{2\sigma^4}{n(n-1)}$

(B) $\dfrac{2\sigma^4(2n-1)}{n^2(n-1)} + \dfrac{4\mu^2\sigma^2}{n}$

(C) $\dfrac{2\sigma^4}{n(n-1)} + \dfrac{4\mu^2\sigma^2}{n^2}$

(D) $\dfrac{2\sigma^4}{n(n-1)} + \dfrac{2\mu^2\sigma^2}{n}$

(E) $\dfrac{2\sigma^4}{n(n-1)} + \dfrac{4\mu^2\sigma^2}{n}$

Zadanie 4

Rozważamy sumę losowej liczby zmiennych losowych:

$$S = S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i \text{, gdy } N \geq 1, \text{ i } \quad S = S_N = 0 \text{, gdy } N < 1,$$

gdzie składniki X_i mają jednakowy rozkład prawdopodobieństwa, są niezależne od siebie nawzajem i od zmiennej losowej N. Niech

$$E(X_i) = 10, \quad Var(X_i) = 4$$

i zmienna losowa N ma rozkład o funkcji prawdopodobieństwa

$$P(N = k) = 0{,}5^{k+1} \quad \text{dla} \quad k = 0,1,2,\ldots \ .$$

Współczynniki a_*, b_* funkcji liniowej $a_* S + b_*$, która najlepiej przybliża zmienną losową N w sensie średniokwadratowym, to znaczy spełnia

$$E\left\{(a_* S + b_* - N)^2\right\} = \min_{a,b} E\left\{(aS + b - N)^2\right\},$$

są równe

(A) $a_* = \frac{5}{52}$, $b_* = \frac{50}{51}$

(B) $a_* = \frac{5}{51}$, $b_* = \frac{1}{51}$

(C) $a_* = \frac{50}{51}$, $b_* = \frac{1}{51}$

(D) $a_* = \frac{5}{51}$, $b_* = \frac{50}{51}$

(E) $a_* = \frac{5}{52}$, $b_* = \frac{4}{52}$

Zadanie 5

W urnie znajduje się 100 kul ponumerowanych od 1 do 100. Losujemy bez zwracania 25 kul i zapisujemy numery, a następnie wrzucamy kule z powrotem do urny. Czynność powtarzamy 5 razy. Oblicz wartość oczekiwaną liczby kul, które zostały wylosowane co najmniej 2 razy.

(A) 66,7

(B) 33,3

(C) 63,3

(D) 36,7

(E) 26,4

Zadanie 6

Rozważmy następujące zagadnienie testowania hipotez statystycznych. Dysponujemy próbką $X_1,...,X_n$ z rozkładu normalnego o nieznanej średniej μ i znanej wariancji równej 2. Przeprowadzamy najmocniejszy test hipotezy $H_0 : \mu = 0$ przeciwko alternatywie $H_1 : \mu = 2$ na poziomie istotności $\alpha = 1/2$. Niech β_n oznacza prawdopodobieństwo błędu drugiego rodzaju, dla rozmiaru próbki n.

Wybierz poprawne stwierdzenie:

(A) $\lim_{n\to\infty} \frac{\beta_n}{1/n} = 1$

(B) $\lim_{n\to\infty} \frac{\beta_n}{e^{-n}/\sqrt{2\pi}} = 1$

(C) $\lim_{n\to\infty} \frac{\beta_n}{e^{-n}/\sqrt{2\pi n}} = 1$

(D) $\lim_{n\to\infty} \frac{\beta_n}{e^{-n}/\sqrt{8\pi n}} = 1$

(E) $\lim_{n\to\infty} \frac{\beta_n}{e^{-n}/\sqrt{4\pi n}} = 1$

Zadanie 7

Zmienna losowa X ma rozkład o gęstości

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \dfrac{\theta}{x^{\theta+1}} & \text{gdy } x > 1 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Nie obserwujemy zmiennej X ale zmienną Y równą X, gdy X jest większe od 2. Nie wiemy, ile było obserwacji zmiennej X nie większych niż 2 ani jakie były ich wartości. W wyniku tego eksperymentu otrzymujemy próbkę losową $Y_1, Y_2, \ldots, Y_8$. Na podstawie próbki budujemy przedział ufności dla parametru θ postaci $[c_1 T, c_2 T]$, gdzie T jest estymatorem największej wiarogodności parametru θ, a stałe c_1 i c_2 dobrane są tak, by

$$P_\theta(\theta < c_1 T) = P_\theta(\theta > c_2 T) = 0{,}05.$$

Wtedy długość przedziału ufności jest równa

(A) 1,596T

(B) 2,292T

(C) 1,146T

(D) 0,798T

(E) 0,573T

Zadanie 8

Niech U i V będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu jednostajnego na przedziale (0,1). Niech

$$Z = \frac{U^{1/2}}{U^{1/2} + V^4},$$

wtedy $E\left(Z \mid U^{1/2} + V^4 < 1\right)$ jest równe

(A) $\frac{8}{9}$

(B) $\frac{1}{9}$

(C) $\frac{12}{17}$

(D) $\frac{5}{17}$

(E) $\frac{12}{13}$

Zadanie 9

Niech $X_0, X_1, \ldots, X_n, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu wykładniczego o wartości oczekiwanej 1. Niech N będzie zmienną losową o rozkładzie Poissona z wartością oczekiwaną $EN = \lambda$ niezależną od zmiennych $X_0, X_1, \ldots, X_n, \ldots$. Niech $M_N = \min\{X_0, X_1, \ldots, X_N\}$. Wyznacz $Cov(M_N, N)$.

(A) $\dfrac{(\lambda+1)e^{-\lambda}-1}{\lambda}$

(B) $\dfrac{\lambda-1+e^{-\lambda}}{\lambda}$

(C) $\dfrac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}$

(D) $\dfrac{\lambda e^{-\lambda}-1}{\lambda}$

(E) 1

Zadanie 10

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym o wartości oczekiwanej 4. Niech N będzie zmienną losową o rozkładzie geometrycznym o funkcji prawdopodobieństwa

$$P(N = k) = \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^k \quad \text{dla} \quad k = 0,1,2,\ldots,$$

niezależną od zmiennych $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$. Niech

$$S_N = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} X_i & \text{gdy } N > 0 \\ 0 & \text{gdy } N = 0 \end{cases}$$

Wtedy $P(S_N < 5)$ jest równe

(A) $0{,}8 - 0{,}2e^{-2}$

(B) $0{,}8(1 - e^{-1})$

(C) $1 - 0{,}2e^{-1}$

(D) $1 - e^{-1}$

(E) $0{,}2(1 - e^{-1})$

Egzamin dla Aktuariuszy z 1 października 2012 r.

Prawdopodobieństwo i Statystyka

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : ....

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	B	
2	A	
3	E	
4	B	
5	D	
6	E	
7	C	
8	A	
9	A	
10	C	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.