Zadanie 1

Mamy 5 niezależnych próbek z tego samego rozkładu normalnego $N(\mu, \sigma^2)$ z nieznaną wartością oczekiwaną μ i znaną wariancją σ^2, przy tym każda z tych próbek ma tę samą liczebność n. Dla każdej z 5 próbek oddzielnie wyznaczamy w standardowy sposób przedział ufności. Niech

$$\left[\bar{X}_i - 0{,}8416\sigma/\sqrt{n}\ ,\ \bar{X}_i + 0{,}8416\sigma/\sqrt{n}\right]$$

będzie przedziałem obliczonym na podstawie i-tej próbki.

Następnie, przedział ufności oparty na wszystkich $5n$ obserwacjach wyznaczamy w sposób niestandardowy: za środek przedziału wybieramy *medianę*

$$m = med(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3, \bar{X}_4, \bar{X}_5)$$

Oblicz

$$c = \Pr\left(m - 0{,}8416\sigma/\sqrt{n} \le \mu \le m + 0{,}8416\sigma/\sqrt{n}\right)$$

(z dokładnością do 0,001).

(A) $c = 0{,}942$

(B) $c = 0{,}884$

(C) $c = 0{,}995$

(D) $c = 0{,}987$

(E) $c = 0{,}800$

Zadanie 2

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{gdy} \quad x \in (0;1) \\ 0 & \text{gdy} \quad x \notin (0;1). \end{cases}$$

Niech $T_n = \prod_{i=1}^{n} X_i^{\frac{3}{n}}$.

Które z poniższych stwierdzeń jest prawdziwe?

(A) $\lim_{n\to\infty} P\{(T_n - e)\sqrt{n} > 2e\} = 0{,}023$

(B) $\lim_{n\to\infty} P\{|T_n - e^{-1}|\sqrt{n} > e\} = 0{,}32$

(C) $\lim_{n\to\infty} P\{T_n < e^{-1}\} = 1$

(D) $\lim_{n\to\infty} P\{|T_n - e^{-1}|\sqrt{n} > 2e^{-1}\} = 0{,}046$

(E) $\lim_{n\to\infty} P\{(T_n - e)\sqrt{n} > 2e^{-1}\} = 0{,}023$

Zadanie 3

Załóżmy, że dysponujemy pojedynczą obserwacją X z rozkładu Laplace'a $L(\mu, \lambda)$ o gęstości

$$f_{\mu,\lambda}(x) = \frac{1}{2\lambda}\exp\left(-\frac{|x-\mu|}{\lambda}\right),$$

gdzie $\mu \in R,\ \lambda > 0$ są nieznanymi parametrami.

Rozważmy zadanie testowania hipotezy

$$H_0 : \mu = 1 \quad i \quad \lambda = 2$$

przeciw alternatywie

$$H_1 : \mu = 2 \quad i \quad \lambda = 1.$$

Najmocniejszy test na pewnym poziomie istotności jest postaci

$$Odrzuć\ H_0,\ gdy\ x \in \left(\frac{5}{3}, b\right).$$

Moc tego testu jest równa

(A) 0,642

(B) 0,458

(C) 0,542

(D) 0,358

(E) 0,858

Zadanie 4

Zmienne losowe $N, Z_1, Z_2, \ldots, Z_n, \ldots$ i $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots, (X_n, Y_n), \ldots$ są niezależne. Każda ze zmiennych losowych Z_i ma jednakowy rozkład prawdopodobieństwa jednostajny na przedziale (0,1). Każda ze zmiennych losowych (X_i, Y_i) ma jednakowy rozkład prawdopodobieństwa taki, że $EX_i = EY_i = 3$ i $VarX_i = VarY_i = 2$ i współczynnik korelacji $Corr(X_i, Y_i) = 0{,}5$. Zmienna losowa N ma rozkład ujemny dwumianowy postaci

$$P(N = n) = \frac{(n+2)(n+1)}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^n, \quad \text{gdy } n = 0,1,2,\ldots.$$

Niech $S_N = \sum_{i=1}^{N} Z_i X_i$ i $T_N = \sum_{i=1}^{N} Z_i Y_i$, gdy $N > 0$. Gdy $N = 0$, to $S_N = T_N = 0$.

Wtedy wariancja zmiennej $W = S_N + T_N$ jest równa

(A) 18

(B) 12,5

(C) 17

(D) 9

(E) 10

Zadanie 5

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_6, Y_1, Y_2, \ldots, Y_{10}$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie Pareto o gęstości

$$p_\theta(x) = \begin{cases} \dfrac{\theta}{(1+x)^{\theta+1}} & \text{gdy } x > 0 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Osobno, na podstawie prób losowych $X_1, X_2, \ldots, X_6$ i $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{10}$, wyznaczono estymatory największej wiarogodności T_X i T_Y parametru θ.
Prawdopodobieństwo $P(T_X < T_Y)$ jest równe

(A) 0,4827

(B) 0,5247

(C) 0,5173

(D) 0,4753

(E) 0,4649

Zadanie 6

Niech (X, Y) będzie dwuwymiarową zmienną losową o funkcji gęstości

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} & \text{gdy } x > 0 \text{ i } x^2 + y^2 < 1 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Niech $Z = \frac{Y}{X}$ i $V = X^2 + Y^2$. Wtedy łączny rozkład zmiennych Z, V jest taki, że

(A) $EZ = 0$

(B) funkcja gęstości rozkładu brzegowego zmiennej Z wyraża się wzorem
$g(z) = \frac{2}{\pi(1+z^2)}$ dla $z \in (0, +\infty)$

(C) mediana rozkładu brzegowego zmiennej Z jest równa $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(D) zmienne Z i V są zależne

(E) kwantyl rzędu 0,25 rozkładu brzegowego zmiennej Z jest równy -1.

Zadanie 7

Załóżmy, że $X_1,...,X_n,...$ jest ciągiem niezależnych, dodatnich zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie o gęstości

$$f(x) = x\exp(-x) \quad \text{dla} \quad x > 0.$$

Niech $S_0 = 0$ i $S_n = X_1 + ... + X_n$ dla $n > 0$. Określmy zmienną losową N w następujący sposób:

$$N = \max\{n \geq 0 : S_n \leq 4\}$$

Oblicz $P(N = 2)$.

(A) $\frac{16}{15}e^{-1}$

(B) $\frac{128}{15}e^{-4}$

(C) $\frac{96}{5}e^{-4}$

(D) $\frac{64}{5}e^{-4}$

(E) $\frac{16}{15}e^{-2}$

Zadanie 8

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_{12}$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie normalnym $N(m,2)$. Parametr m jest nieznany i jest realizacją zmiennej losowej o rozkładzie normalnym $N(1,4)$. Wyznaczamy estymator bayesowski parametru m przy funkcji straty LINEX danej wzorem

$$L(m,a) = e^{m-a} - (m-a) - 1,$$

gdzie a oznacza wartość estymatora.

Wtedy ryzyko a posteriori estymatora bayesowskiego jest równe

(A) 1,125

(B) 0,160

(C) 0,040

(D) 0,080

(E) 0,842

Zadanie 9

Obserwujemy niezależne zmienne losowe $X_1, X_2, X_3, X_4, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, Y_6$. Zmienne losowe X_1, X_2, X_3, X_4 mają ten sam rozkład o dystrybuancie F_{μ_1}, a zmienne losowe $Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, Y_6$ mają ten sam rozkład o dystrybuancie F_{μ_2}. Dystrybuanta F_μ spełnia warunek

$$F_\mu(x) = F(x-\mu)$$

dla pewnej ustalonej, nieznanej, ciągłej, ściśle rosnącej dystrybuanty *F*. Weryfikujemy hipotezę $H_0: \mu_1 = \mu_2$ przy alternatywie $H_1: \mu_1 > \mu_2$ stosując test o obszarze krytycznym

$$K = \{S : S \geq 19\},$$

gdzie *S* jest sumą rang tych spośród zmiennych X_1, X_2, X_3, X_4, w próbce złożonej ze wszystkich obserwacji ustawionych w ciąg rosnący, które są większe od $\max\{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, Y_6\}$. Wyznaczyć rozmiar testu.

(A) $\frac{14}{105}$

(B) $\frac{9}{70}$

(C) $\frac{29}{210}$

(D) $\frac{13}{105}$

(E) $\frac{1}{7}$

Zadanie 10

Łańcuch Markowa ma trzy stany: E_1, E_2, E_3, i macierz przejścia

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Niech X_n oznacza stan, w którym znajduje się łańcuch po dokonaniu n kroków, $n = 0,1,\ldots$. Funkcję f na zbiorze stanów określamy wzorem: $f(E_i) = i - 1$ dla $i = 1,2,3.$

Niech $c = \lim_{n\to\infty} Cov[f(X_n), f(X_{n+1})]$. Granica c jest równa

(A) $\frac{224}{625}$

(B) 0

(C) $\frac{50}{625}$

(D) $\frac{49}{625}$

(E) $\frac{74}{625}$

Egzamin dla Aktuariuszy z 8 grudnia 2014 r.

Prawdopodobieństwo i Statystyka

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ : ....K L U C Z O D P O W I E D Z I............................

~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	B	
2	D	
3	B	
4	C	
5	A	
6	E	
7	C	
8	D	
9	A	
10	E	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.