Zadanie 1

Niech

$$N_1 = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} X_i & gdy\ \ N > 0 \\ 0 & gdy\ \ N = 0 \end{cases} \quad \text{i} \quad N_0 = N - N_1,$$

gdzie N jest zmienną losową o rozkładzie ujemnym dwumianowym

$$P(N = n) = (n+1)\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^n, \ \text{gdzie}\ n = 0,1,2,\ldots,$$

zaś $X_1, X_2, \ldots X_n, \ldots$ są zmiennymi losowymi niezależnymi od N i od siebie nawzajem. Zakładamy, że każda że zmiennych X_i ma rozkład Bernoulli'ego: $P(X_i = 1) = \frac{3}{4}$ i $P(X_i = 0) = \frac{1}{4}$. Wtedy

$$E\left[\frac{N_1}{N_0 + 1}\right]$$

jest równe

(A) $\frac{8}{3}$

(B) $\frac{4}{3}$

(C) 2

(D) $\frac{9}{4}$

(E) $\frac{5}{3}$

Zadanie 2

Niech $X_1,...,X_{10}$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu prawdopodobieństwa o gęstości

$$f_{\theta,\alpha}(x) = \begin{cases} (1/\alpha)\, e^{-(x-\theta)/\alpha} & dla\ \ x \geq \theta; \\ 0 \quad dla\ x < \theta. \end{cases}$$

Wyznaczono *estymatory największej wiarogodności* $(\hat{\theta},\hat{\alpha})$ parametrów (θ,α) w sytuacji, gdy oba parametry są nieznane ($\alpha > 0$). A następnie zbudowano przedział ufności dla parametru α , w oparciu o estymator $\hat{\alpha}$, postaci $[c\hat{\alpha}, d\hat{\alpha}]$, taki że

$$P_{\theta,\alpha}(\alpha < c\hat{\alpha}) = P_{\theta,\alpha}(\alpha > d\hat{\alpha}) = 0{,}05\,.$$

Liczba *c* jest równa

(A) $c = 0{,}69$

(B) $c = 0{,}64$

(C) $c = 0{,}98$

(D) $c = 0{,}62$

(E) $c = 0{,}76$

Zadanie 3

Niech (X, Y) będzie dwuwymiarową zmienną losową o funkcji gęstości

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-x} & \text{gdy } x > 0 \text{ i } y \in (0;1) \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Niech $Z = X + 2Y$. Wtedy $E(X \mid Z = 3)$ jest równa

(A) $\dfrac{2 - 4e^{-3}}{1 - e^{-3}}$

(B) $\dfrac{2 - e^{-2}}{1 - e^{-2}}$

(C) $\dfrac{2 - 4e^{-2}}{1 - e^{-2}}$

(D) $\dfrac{2 - e^{-3}}{1 - e^{-3}}$

(E) $\dfrac{2 - e^{-3}}{1 - e^{-2}}$

Zadanie 4

Niech X_1, X_2, X_3, X_4 będzie próbą z rozkładu jednostajnego o gęstości

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} & \text{gdy } x \in (0;\theta) \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Zakładamy, że nieznany parametr θ jest zmienną losową o rozkładzie z funkcją gęstości daną wzorem

$$\pi(\theta) = \begin{cases} \frac{4}{3}\theta^4 e^{-2\theta} & gdy\ \theta > 0 \\ 0 & gdy\ \theta \le 0. \end{cases}$$

Hipotezę $H_0 : \theta \le 3$ przy alternatywie $H_1 : \theta > 3$ odrzucamy dla tych wartości (x_1, x_2, x_3, x_4), dla których prawdopodobieństwo a posteriori zbioru $\{\theta : \theta > 3\}$ jest większe niż $\frac{1}{2}$.

Rozmiar tego testu jest równy

(A) 0,003

(B) 0,050

(C) 0,388

(D) 0,274

(E) 0,500

Zadanie 5

Załóżmy, że $X_1,...,X_n,\dots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym, ciągłym rozkładzie prawdopodobieństwa, mającymi momenty rzędu 1, 2 i 3. Znamy

$$\mu = E(X_i) \quad \text{i} \quad \sigma^2 = Var(X_i).$$

Niech $f(x)$ oznacza gęstość rozkładu pojedynczej zmiennej X_i. Wiemy, że rozkład jest symetryczny w tym sensie, że $f(\mu + x) = f(\mu - x)$ dla każdego x.

Niech $S_N = \begin{cases} X_1 + ... + X_n & gdy \ N = n > 0 \\ 0 & gdy \ N = 0 \end{cases}$,

gdzie N jest zmienną o rozkładzie Poissona o wartości oczekiwanej 1.
Trzeci moment $E(S_N^3)$ jest równy

(A) $E(S_N^3) = 6\mu^3 + 6\mu\sigma^2$

(B) $E(S_N^3) = 5\mu^3 + 6\mu\sigma^2$

(C) $E(S_N^3) = 5\mu^3 + 3\mu\sigma^2$

(D) $E(S_N^3) = \mu^3 + 6\mu\sigma^2$

(E) $E(S_N^3) = \mu^3 + 3\mu\sigma^2$

Zadanie 6

Pan A przeznaczył 6 zł na pewna grę. W pojedynczej kolejce gry pan A wygrywa 1 zł z prawdopodobieństwem 1/3 lub przegrywa 1 zł z prawdopodobieństwem 2/3. Pan A kończy grę, gdy wszystko przegra lub gdy będzie miał 9 zł.
Prawdopodobieństwo, że pan A wszystko przegra jest równe

(A) 0,88

(B) 0,67

(C) 0,50

(D) 0,97

(E) 0,77

Zadanie 7

Rozważmy następujący schemat urnowy:

W każdej z 10 urn znajdują się 2 kule, oznaczone liczbami:

- W urnie 1 znajdują się 2 kule oznaczone liczbą 1,
- w urnie 2 znajdują się 2 kule oznaczone liczbą 2,
- ....
- w urnie 10 znajdują się 2 kule oznaczone liczbą 10.

Losujemy kulę z urny 1 i przekładamy ją do urny 2. Następnie (po wymieszaniu kul) losujemy kulę z urny 2 i przekładamy do urny 3, itd., kulę wylosowaną z urny 9 przekładamy do urny 10, wreszcie losujemy kulę z urny 10. Jakie jest prawdopodobieństwo, że ta ostatnia wylosowana kula ma numer większy niż 6 ?

(A) $\frac{54}{81}$

(B) $\frac{80}{81}$

(C) $\frac{44}{81}$

(D) $\frac{72}{81}$

(E) $\frac{26}{81}$

Zadanie 8

Rozpatrzmy następujący model regresji liniowej bez wyrazu wolnego:

$$Y_i = \beta \cdot x_i + \varepsilon_i \qquad i = 1,2,\dots,25,$$

gdzie $x_i > 0$ są znanymi liczbami, β jest nieznanym parametrem, zaś ε_i są błędami losowymi. Zakładamy, że ε_i są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach normalnych i

$$E[\varepsilon_i] = 0 \quad \text{i} \quad Var[\varepsilon_i] = x_i^2 \;, \qquad i = 1,2,\dots,25.$$

Niech $\hat{\beta}$ będzie estymatorem parametru β o następujących własnościach:

$\hat{\beta}$ jest liniową funkcją obserwacji, tzn. jest postaci $\hat{\beta} = \sum_{i=1}^{25} c_i Y_i$,

$\hat{\beta}$ jest nieobciążony,

$\hat{\beta}$ ma najmniejszą wariancję spośród estymatorów liniowych i nieobciążonych.

Wyznaczyć stałą c taką, że spełniony jest warunek

$$P\left(\left|\hat{\beta} - \beta\right| < c\right) = 0,95.$$

(A) $c = 1,96$

(B) $c = \dfrac{9,8}{\sqrt{\sum_{i=1}^{25} x_i}}$

(C) $c = 0,392\sqrt{\sum_{i=1}^{25} x_i}$

(D) $c = 0,392$

(E) $c = \dfrac{1,96}{\sqrt{\sum_{i=1}^{25} x_i}}$

Zadanie 9

Niech $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu jednostajnego na przedziale (0,1). Niech $Z_{1:n} = \min\{Z_1, Z_2, \ldots, Z_n\}$.
Wtedy $E(Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n \mid Z_{1:n} = 0{,}5)$ jest równa

(A) $\frac{2n-1}{2}$

(B) $\frac{n+1}{4}$

(C) $\frac{5n-3}{4}$

(D) $\frac{3n-1}{4}$

(E) $\frac{n}{2}$

Zadanie 10

Z rozkładu normalnego $N(\mu,\sigma^2)$, gdzie oba parametry są nieznane, wylosowano niezależnie dwie próbki losowe: $X_{11}, X_{12},..., X_{1n}$ oraz $X_{21}, X_{22},..., X_{2m}$. Dla obu próbek wyznaczono średnie: $\overline{X}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{1i}$ i $\overline{X}_2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_{2i}$ oraz wariancje próbkowe: $S_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_{1i} - \overline{X}_1)^2$ i $S_2^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(X_{2i} - \overline{X}_2)^2$. Po czym wstępne dane zostały zniszczone. Estymator nieobciążony o minimalnej wariancji parametru σ jest równy

(A) $\dfrac{\Gamma((m+n-1)/2)}{\sqrt{2}\Gamma((m+n)/2)}\sqrt{nS_1^2 + mS_2^2}$

(B) $\dfrac{\Gamma(m+n-1)}{\sqrt{2}\Gamma(m+n)\sqrt{m+n-1}}\sqrt{nS_1^2 + mS_2^2}$

(C) $\dfrac{\Gamma(m+n-1)}{\sqrt{2}\Gamma(m+n)}\sqrt{nS_1^2 + mS_2^2 + \dfrac{mn}{n+m}(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)^2}$

(D) $\dfrac{\Gamma(m+n-1)}{\sqrt{2}\Gamma(m+n)\sqrt{m+n-1}}\sqrt{nS_1^2 + mS_2^2 + \dfrac{mn}{n+m}(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)^2}$

(E) $\dfrac{\Gamma((m+n-1)/2)}{\sqrt{2}\Gamma((m+n)/2)}\sqrt{nS_1^2 + mS_2^2 + \dfrac{mn}{n+m}(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)^2}$

Egzamin dla Aktuariuszy z 29 września 2014 r.

Prawdopodobieństwo i Statystyka

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ : ....K L U C Z   O D P O W I E D Z I..............................

~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	E	
2	A	
3	C	
4	C	
5	B	
6	A	
7	B	
8	D	
9	D	
10	E	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.