Zadanie 1

Urna zawiera 5 kul o numerach: 0, 1, 2, 3, 4. Z urny ciągniemy kulę, zapisujemy numer i kulę wrzucamy z powrotem do urny. Czynność tę powtarzamy, aż kule z numerami 1, 2, 3 zostaną wyciągnięte co najmniej raz. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że czynność powtórzymy 5 razy.

(A) $\frac{146}{5^5}$

(B) $\frac{312}{5^5}$

(C) $\frac{438}{5^5}$

(D) $\frac{330}{5^5}$

(E) $\frac{110}{5^5}$

Zadanie 2

Niech X_1, X_2, X_3, X_4 będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu prawdopodobieństwa o gęstości

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1} & dla\ \ x \in (0,1); \\ \\ 0 & dla\ x \notin (0,1), \end{cases}$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem.
Rozpatrzmy zadanie testowania hipotezy $H_0 : \theta = 1$ przeciwko alternatywie $H_1 : \theta = 3$.
Zbudowano taki test, dla którego *suma* prawdopodobieństw błędów I i II rodzaju, oznaczanych odpowiednio przez α i β, jest najmniejsza. Oblicz tę najmniejszą wartość $\alpha + \beta$.

(A) 0,186

(B) 0,366

(C) 0,286

(D) 0,655

(E) 0,640

Zadanie 3

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że $EX_i = im$ i $VarX_i = 2i^2m^2$ dla $i = 1,2,\ldots,n$, gdzie $m>0$ jest nieznanym parametrem. W klasie estymatorów parametru m postaci $\hat{m} = \sum_{i=1}^{n} c_i X_i$ wyznaczono estymator o najmniejszym błędzie średniokwadratowym. Błąd średniokwadratowy tego estymatora jest równy

(A) $\dfrac{4m^2}{n+2}$

(B) $m^2 \dfrac{4n+2}{(n+2)^2}$

(C) $m^2 \dfrac{n+5}{(n+2)^2}$

(D) $m^2 \dfrac{5n+1}{(n+2)^2}$

(E) $\dfrac{2m^2}{n+2}$

Zadanie 4

Załóżmy, że $X_1,...,X_5$ jest próbką z rozkładu normalnego $N(\mu,\sigma^2)$ o nieznanej wartości oczekiwanej i nieznanej wariancji, zaś X_6 jest zmienną losową z tego samego rozkładu, niezależną od próbki. Interpretujemy zmienną X_6 jako kolejną obserwację, która pojawi się w przyszłości, ale obecnie jest nieznana.

Zbuduj ,,przedział ufności''

$$[L,U]=[L(X_1,...,X_5),U(X_1,...,X_5)]$$

oparty na próbce $X_1,...,X_5$ taki, że

$$\Pr\{L(X_1,...,X_5)\le X_6 \le U(X_1,...,X_5)\}=0{,}95\,,$$

przy tym żądamy, żeby przedział był symetryczny, tzn. $\frac{1}{2}(L+U)=\bar{X}$. Używamy tutaj oznaczeń:

$$\bar{X}=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}X_i, \qquad S^2=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{5}(X_i-\bar{X})^2.$$

(A) $L=\bar{X}-3{,}04\cdot S$, $U=\bar{X}+3{,}04\cdot S$

(B) $L=\bar{X}-2{,}15\cdot S$, $U=\bar{X}+2{,}15\cdot S$

(C) $L=\bar{X}-2{,}78\cdot S$, $U=\bar{X}+2{,}78\cdot S$

(D) $L=\bar{X}-2{,}82\cdot S$, $U=\bar{X}+2{,}82\cdot S$

(E) $L=\bar{X}-0{,}56\cdot S$, $U=\bar{X}+0{,}56\cdot S$

Zadanie 5

Mamy dwie urny: I i II. Na początku doświadczenia w każdej z urn znajdują się 2 kule białe i 2 czarne. Losujemy po jednej kuli z każdej urny - po czym kulę wylosowaną z urny I wrzucamy do urny II, a tę wylosowaną z urny II wrzucamy do urny I. Czynność tę powtarzamy wielokrotnie. Niech X_n oznacza zmienną losową równą liczbie kul białych w urnie I po n-tym powtórzeniu czynności.
Wtedy granica

$$\lim_{n\to+\infty} E(X_n X_{n+1})$$

jest równa

(A) 4

(B) 2

(C) $\frac{30}{7}$

(D) $\frac{13}{3}$

(E) $\frac{10}{3}$

Zadanie 6

O zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots, X_{12}$ o tej samej wartości oczekiwanej równej 2 oraz tej samej wariancji równej 1, zakładamy, iż:

$COV(X_i, X_j) = \frac{1}{3}$ dla $i \neq j$.

Zmienne losowe $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{12}$ są nawzajem niezależne oraz niezależne od zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots, X_{12}$, i mają rozkłady prawdopodobieństwa postaci:

$$P(\varepsilon_i = 1) = P\left(\varepsilon_i = \frac{1}{2}\right) = P(\varepsilon_i = 0) = \frac{1}{3}.$$

Wariancja zmiennej losowej $S = \sum_{i=1}^{12} \varepsilon_i \cdot X_i$ jest równa

(A) 13

(B) 24

(C) 18,5

(D) 35

(E) 16

Zadanie 7

Załóżmy, że niezależne zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_n$, $n > 1$, mają rozkłady Pareto, zmienna X_i rozkład o gęstości

$$f_i(x) = \begin{cases} \dfrac{2i}{(1+x)^{2i+1}} & dla \;\; x > 0 \\ \\ 0 \quad dla \;\; x \le 0, & \end{cases}$$

$i = 1, 2, \ldots, n$.

Wtedy prawdopodobieństwo $P\left(X_1 = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}\right)$ jest równe

(A) $\dfrac{2}{3n}$

(B) $\dfrac{2}{n^2 + n + 2}$

(C) $\dfrac{2}{n^2 + 2n - 2}$

(D) $\dfrac{2}{n^2 + n}$

(E) $\dfrac{2}{n^2 + 2}$

Zadanie 8

Niech $N, X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi przy danym $\Lambda = \lambda$. Zmienne X_i, $i = 1,2,\ldots$, mają warunkowe rozkłady wykładnicze o wartości oczekiwanej $\frac{1}{\lambda}$, przy $\Lambda = \lambda$. Warunkowy rozkład zmiennej losowej N przy danym $\Lambda = \lambda$ jest rozkładem Poissona o wartości oczekiwanej λ. Rozkład brzegowy zmiennej Λ jest rozkładem gamma o gęstości

$$f(\lambda) = \begin{cases} \frac{8}{3}\lambda^3 e^{-2\lambda} & \text{gdy } \lambda > 0 \\ 0 & \text{gdy } \lambda \le 0 \end{cases}.$$

Niech

$$S = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} X_i & \text{gdy } N > 0 \\ 0 & \text{gdy } N = 0 \end{cases} \quad \text{i} \quad T = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} Y_i & \text{gdy } N > 0 \\ 0 & \text{gdy } N = 0 \end{cases}, \quad \text{gdzie } Y_i = \min\{X_i, 2\}.$$

Oblicz współczynnik kowariancji $Cov(S,T)$.

(A) 0

(B) $\frac{25}{24}$

(C) $\frac{11}{24}$

(D) $\frac{28}{24}$

(E) $\frac{13}{24}$

Zadanie 9

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$, $n > 2$, będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu jednostajnego na przedziale $(0, \theta_1)$, a $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu jednostajnego na przedziale $(0, \theta_2)$, gdzie θ_1, θ_2 są nieznanymi parametrami dodatnimi. Wszystkie zmienne są niezależne. Niech $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$ będą estymatorami największej wiarogodności parametrów θ_1 i θ_2 w oparciu o próby $X_1, X_2, \ldots, X_n$ i $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ odpowiednio. Weryfikujemy hipotezę $H_0 : \theta_1 = \theta_2$ przy alternatywie $H_1 : \theta_1 = 2\theta_2$ testem o obszarze krytycznym

$$K = \left\{ \frac{\hat{\theta}_1}{\hat{\theta}_2} > c \right\},$$

gdzie c jest stałą dobraną tak, by test miał rozmiar 0,1.
Najmniejsze *n*, przy którym moc tego testu jest nie mniejsza niż 0,9, jest równe

(A) 8

(B) 4

(C) 5

(D) 6

(E) 7

Zadanie 10

Rozważamy model regresji liniowej postaci $Y_i = a + bx_i + \varepsilon_i$, $i = 1,2,3,4,5$, gdzie a, b są nieznanymi parametrami rzeczywistymi, $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = 3$, $x_4 = x_5 = 5$, a ε_i są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie normalnym o wartości oczekiwanej 0 i wariancji 9.
Hipotezę $H_0 : b = 0$ przy alternatywie $H_1 : b \neq 0$ weryfikujemy testem o obszarze krytycznym postaci $\left\{\left|\hat{b}\right| > c\right\}$, gdzie $\hat{b}$ jest estymatorem największej wiarogodności parametrów b, a stała c dobrana jest tak, aby test miał rozmiar 0,05. Stała c jest równa

(A) 0,65

(B) 1,96

(C) 0,98

(D) 3,92

(E) 1,47

Egzamin dla Aktuariuszy z 26 maja 2014 r.

Prawdopodobieństwo i Statystyka

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : ....

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	D	
2	C	
3	E	
4	A	
5	C	
6	B	
7	D	
8	B	
9	C	
10	E	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.
♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.