

Zadanie 1.

Niech X_1, X_2, \dots, X_n będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu o gęstości

$$f_{\theta}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} x^{-\frac{1}{\theta}-1} & \text{gdy } x > 1 \\ 0 & \text{gdy } x \leq 1, \end{cases}$$

gdzie $\theta \in (0,1)$ jest nieznanym parametrem. Rozważamy nieobciążony estymator parametru θ postaci $T_n = aY$, gdzie $Y = \min\{\ln X_1, \ln X_2, \dots, \ln X_n\}$ i a jest odpowiednio dobraną stałą (być może zależną od liczebności próby n).

Dla $\theta = \frac{1}{3}$ i $\varepsilon = \frac{1}{6}$ zachodzi

(A) $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{\theta}\{|T_n - \theta| > \varepsilon\} = 0$

(B) $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{\theta}\{|T_n - \theta| > \varepsilon\} = 1 - \exp\left(-\frac{3}{2}\right) - \exp\left(-\frac{1}{2}\right)$

(C) $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{\theta}\{|T_n - \theta| > \varepsilon\} = 1 + \exp\left(-\frac{3}{2}\right) - \exp\left(-\frac{1}{2}\right)$

(D) $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{\theta}\{|T_n - \theta| > \varepsilon\} = \exp\left(-\frac{3}{2}\right)$

(E) $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{\theta}\{|T_n - \theta| > \varepsilon\} = 1$

Zadanie 2.

Zmienne losowe X_1, X_2, \dots, X_n są warunkowo niezależne przy znanej wartości zmiennej losowej θ i mają rozkłady o wartości oczekiwanej $E(X_i | \theta) = 10\theta$ i wariancji $Var(X_i | \theta) = 100\theta^2$. Niech N będzie zmienną losową warunkowo niezależną od X_1, X_2, \dots, X_n przy znanym θ i o warunkowym rozkładzie

$$P(N = n | \theta) = n(1 - \theta)^{n-1} \theta^2, \text{ dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

Zmienna losowa θ ma rozkład Beta o gęstości $p(\theta) = 6\theta(1 - \theta)$, gdy $\theta \in (0, 1)$. Niech

$$S_N = \sum_{i=1}^N X_i. \text{ Wtedy wariancja } Var\left(\frac{S_N}{N}\right) \text{ jest równa}$$

- (A) 30
- (B) 20,5
- (C) 25
- (D) 35
- (E) 20

Zadanie 3.

Rozważamy model regresji liniowej postaci $Y_i = bx_i + \varepsilon_i$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, gdzie b jest nieznanym parametrem rzeczywistym, $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = \sqrt{5}$, $x_4 = x_5 = 3$, a ε_i są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie normalnym o wartości oczekiwanej 0 i nieznannej wariancji $\sigma^2 > 0$.

Hipotezę $H_0 : b = 0$ przy alternatywie $H_1 : b \neq 0$ weryfikujemy testem o obszarze

krytycznym postaci $\left\{ \left| \frac{\hat{b}}{\hat{\sigma}} \right| > c \right\}$, gdzie \hat{b} i $\hat{\sigma}$ są estymatorami największej

wiarogodności parametrów b i σ , a stała c dobrana jest tak, aby test miał rozmiar 0,05. Stała c jest równa

- A) 2,48
- (B) 2,77
- (C) 0,56
- (D) 0,71
- (E) 0,62

Zadanie 4.

Niech X_1, X_2, \dots, X_n będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie normalnym $N(0, \sigma^2)$, gdzie wariancja σ^2 jest nieznana. Zakładamy, że

$r = \frac{1}{\sigma^2}$ ma rozkład a priori $Gamma(\alpha, \beta)$ o gęstości

$$p(r) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} r^{\alpha-1} e^{-\beta r} & \text{gdy } r > 0 \\ 0 & \text{gdy } r \leq 0 \end{cases}$$

gdzie α, β są znanymi liczbami dodatnimi.

Estymator bayesowski parametru σ^2 przy funkcji straty postaci $L(\sigma^2, a) = \frac{(\sigma^2 - a)^2}{\sigma^4}$ jest równy

(A)
$$\frac{\beta + \sum_{i=1}^n X_i^2}{\frac{n}{2} + \alpha + 1}$$

(B)
$$\frac{\beta + \sum_{i=1}^n X_i^2}{\frac{n}{2} + \alpha}$$

(C)
$$\frac{\beta + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n X_i^2}{\frac{n}{2} + \alpha - 1}$$

(D)
$$\frac{\beta + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n X_i^2}{\frac{n}{2} + \alpha}$$

(E)
$$\frac{\beta + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n X_i^2}{\frac{n}{2} + \alpha + 1}$$

Zadanie 5.

Obserwujemy niezależne zmienne losowe $X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5$. Zmienne losowe X_1, X_2, X_3 mają ten sam rozkład o dystrybuancie F_{μ_1} , a zmienne losowe Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5 mają ten sam rozkład o dystrybuancie F_{μ_2} . Dystrybuanta F_{μ} spełnia warunek

$$F_{\mu}(x) = F(x - \mu)$$

dla pewnej ustalonej, nieznanej, ciągłej, ściśle rosnącej dystrybuanty F . Weryfikujemy hipotezę $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ przy alternatywie $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ stosując test o obszarze krytycznym

$$K = \{S : S < 10 \vee S > 17\},$$

gdzie S jest sumą rang zmiennych losowych X_1, X_2, X_3 w próbce złożonej ze wszystkich obserwacji ustawionych w ciąg rosnący. Wyznaczyć rozmiar testu.

- (A) 0,214
- (B) 0,250
- (C) 0,125
- (D) 0,290
- (E) 0,105

Zadanie 6.

Zmienne losowe X_1, X_2, \dots, X_{20} są niezależne o jednakowym rozkładzie normalnym o wartości oczekiwanej 1 i wariancji 4. Niech $S_5 = \sum_{i=1}^5 X_i$ i $S_{20} = \sum_{i=1}^{20} X_i$. Wtedy $E(S_5^2 | S_{20} = 24)$ jest równa

- (A) 41
- (B) 76
- (C) 36
- (D) 51
- (E) 46

Zadanie 7.

Wybieramy losowo i niezależnie dwa punkty z odcinka $[0, 2\pi]$. Traktując te dwa punkty jako punkty na okręgu o promieniu 1, obliczyć wartość oczekiwaną odległości między nimi (odległość mierzymy *wzdłuż cięciwy*).

(A) $\frac{\pi}{3}$

(B) $\frac{4}{\pi}$

(C) $\frac{4}{3}$

(D) $\frac{4\pi + 4}{\pi^2}$

(E) 1

Zadanie 8.

Zakładając, że zmienne losowe X_1, X_2, X_3 są niezależne i mają jednakowy rozkład jednostajny na przedziale $(-\theta, \theta)$, gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem, weryfikujemy hipotezę $H_0: \theta = 1$ przy alternatywie $H_1: \theta \neq 1$ za pomocą testu jednostajnie najmocniejszego na poziomie istotności 0,2. W rzeczywistości zmienne losowe X_1, X_2, X_3 są niezależne o tym samym rozkładzie o gęstości

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} |x| & \text{gdy } x \in (-2, 2) \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Prawdopodobieństwo zbioru krytycznego rozważanego testu przy tym rozkładzie zmiennych X_1, X_2, X_3 jest równe

- (A) 0,9969
- (B) 0,9850
- (C) 0,9900
- (D) 0,9875
- (E) 0,9994

Zadanie 9.

W urnie znajduje się trzydzieści kul, na każdej narysowana jest litera i cyfra. Mamy

10 kul oznaczonych X1

6 kul oznaczonych Y1

8 kul oznaczonych X2

6 kule oznaczone Y2.

Losujemy bez zwracania 15 kul. Niech N_{X_1} określa liczbę kul oznaczonych literą X1 wśród kul wylosowanych, a N_2 liczbę kul z cyfrą 2 wśród kul wylosowanych.

Obliczyć $Var(N_{X_1} | N_2 = 5)$.

(A) $\frac{15}{16}$

(B) $\frac{400}{261}$

(C) $\frac{75}{32}$

(D) $\frac{3}{2}$

(E) 1

Zadanie 10.

Niech $X_0, X_1, X_2, \dots, X_n$, $n > 2$, będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu Pareto o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{(1+x)^4} & \text{gdy } x > 0 \\ 0 & \text{gdy } x \leq 0 \end{cases}$$

Niech $U = \min\{X_0, X_1, X_2, \dots, X_n\}$. Wtedy $Cov(U, X_0)$ jest równa

(A) $\frac{9n^2 + 6n - 5}{2(3n - 1)(3n + 2)}$

(B) $\frac{3}{2(3n - 1)(3n + 2)}$

(C) $\frac{3}{2(3n + 1)(3n + 2)}$

(D) $\frac{7 - 9n^2}{2(9n^2 - 1)(3n + 2)}$

(E) $\frac{9n^2 + 6n - 5}{2(3n + 1)(3n + 2)}$

Egzamin dla Aktuariuszy z 28 maja 2012 r.**Prawdopodobieństwo i statystyka****Arkusz odpowiedzi***

Imię i nazwisko :

Pesel

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja ♦
1	C	
2	C	
3	E	
4	E	
5	B	
6	D	
7	B	
8	B	
9	A	
10	C	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.