Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

XLVI Egzamin dla Aktuariuszy z 2 czerwca 2008 r.

Część IV

Prawdopodobieństwo i statystyka

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej: ....

Czas egzaminu: 100 minut

Komisja Nadzoru Finansowego, Warszawa 2.06.2008 r.

Zadanie 1.

Wykonano n razy niezależnie doświadczenie, które może zakończyć się jednym z dwóch wyników: sukcesem lub porażką. Prawdopodobieństwo sukcesu w każdym doświadczeniu jest jednakowe, nieznane równe θ. Parametr θ jest realizacją zmiennej losowej o rozkładzie prawdopodobieństwa o gęstości

$$p(\theta) = \begin{cases} 6\theta(1-\theta) & \text{gdy } \theta \in (0,1) \\ 0 & \text{gdy } \theta \notin (0,1) \end{cases}$$

Otrzymano r sukcesów. Oblicz prawdopodobieństwo, że w $n+1$ doświadczeniu otrzymamy sukces.

(A) $\frac{r}{n}$

(B) $\frac{r+1}{n+1}$

(C) $\frac{r+1}{n+2}$

(D) $\frac{r+3}{n+5}$

(E) $\frac{r+2}{n+4}$

Zadanie 2.

Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie Pareto o gęstości

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \dfrac{\theta}{(1+x)^{\theta+1}} & \text{gdy } x > 0 \\ 0 & \text{gdy } x \leq 0 \end{cases}$$

Niestety nie obserwujemy zmiennej X, ale zmienną Y równą $X-1$, gdy $X>1$. W wyniku tych obserwacji otrzymujemy prostą próbę losową $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{10}$ (nie wiemy ile razy pojawiły się wartości zmiennej X z przedziału $(0,1]$) i na jej podstawie weryfikujemy hipotezę $H:\theta = 2$ przy alternatywie $K:\theta = 4$. Moc testu najmocniejszego na poziomie istotności 0,05 jest równa

(A) 0,1937

(B) 0,3570

(C) 0,3614

(D) 0,6430

(E) 0,6386

Zadanie 3.

Obserwujemy działanie pewnego urządzenia w kolejnych chwilach $t = 0,1,2,\ldots.$ Działanie tego urządzenia zależy od pracy dwóch podzespołów A i B. Każdy z nich może ulec awarii w jednostce czasu z prawdopodobieństwem 0,2 niezależnie od drugiego. Jeżeli jeden z podzespołów ulega awarii, to urządzenie nie jest naprawiane i działa dalej wykorzystując drugi podzespół. Jeżeli oba podzespoły są niesprawne w chwili t, to następuje ich naprawa i w chwili $t+1$ oba są sprawne. Prawdopodobieństwo, że dokładnie jeden z podzespołów A i B jest sprawny w chwili t dąży, przy t dążącym do nieskończoności, do następującej liczby (z dokładnością do 0,001):

(A) 0,337

(B) 0,541

(C) 0,270

(D) 0,878

(E) 0,663

Zadanie 4.

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie normalnym $N(m, \sigma^2)$, gdzie $m \in R$, $\sigma > 0$ są nieznanymi parametrami. Niech T będzie estymatorem nieobciążonym o minimalnej wariancji funkcji od parametrów równej $E(X_1^2)$. Wtedy wariancja tego estymatora jest równa

(A) $\frac{2\sigma^2}{n}\left(m^2 + \sigma^2\right)$

(B) $\frac{2\sigma^2}{n}\left(2m^2 + \frac{\sigma^2}{n}\right)$

(C) $\frac{2\sigma^2}{n}\left(2m^2 + \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{n}\right)$

(D) $\frac{2\sigma^2}{n}\left(2m^2 + \sigma^2\right)$

(E) $\frac{2\sigma^2}{n}\left(m^2 + \frac{\sigma^2}{n}\right)$

Zadanie 5.

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie logarytmiczno-normalnym z parametrami $\mu \in R$ i $\sigma > 0$. Niech T_n oznacza estymator największej wiarogodności wartości oczekiwanej m w tym modelu w oparciu o próbę $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Niech $\mu = 0$ i $\sigma = 1$.

Wtedy

(A) $\lim_{n \to +\infty} P\left(|T_n - m|\sqrt{n} > 2\sqrt{2}\right) = 0{,}32218$

(B) $\lim_{n \to +\infty} P\left(|T_n - m|\sqrt{n} > 2\sqrt{2}\right) = 0{,}12602$

(C) $\lim_{n \to +\infty} P\left(|T_n - m|\sqrt{n} > 2\sqrt{2}\right) = 0{,}49020$

(D) $\lim_{n \to +\infty} P\left(|T_n - m|\sqrt{n} > 2\sqrt{2}\right) = 0$

(E) $\lim_{n \to +\infty} P\left(|T_n - m|\sqrt{n} > 2\sqrt{2}\right) = 0{,}16152$

Zadanie 6.

Załóżmy, że A i C są zdarzeniami losowymi takimi, że $\Pr(A-C)>0$, $\Pr(C-A)>0$ oraz $\Pr(A\cap C)>0$. Wiadomo, że dla pewnego zdarzenia B zachodzi nierówność

$$\Pr(B|A\cup C)>\Pr(B|C).$$

Wynika stąd, że

(A) $\Pr(B|A\cup C)<\Pr(B|A)$

(B) $\Pr(B|A\cup C)>\Pr(B|A)$

(C) $\Pr(B|A-C)>\Pr(B|C)$

(D) $\Pr(B|A\cap C)>\Pr(B|C)$

(E) $\Pr(B|A-C)>\Pr(B|C-A)$

Zadanie 7.

W urnie jest 15 kul, w tym: 1 kula biała, 9 różowych, k czerwonych i pozostałe zielone. Losujemy n razy ze zwracaniem po jednej kuli. Niech

N_b oznacza liczbę wylosowanych kul białych,

N_r oznacza liczbę wylosowanych kul różowych,

N_{cz} oznacza liczbę wylosowanych kul czerwonych,

N_z oznacza liczbę wylosowanych kul zielonych.

Jaka jest liczba kul czerwonych w urnie, jeśli zmienne $N_b + N_z$ i $N_r + N_z - N_{cz}$ są nieskorelowane.

(A) 4

(B) 3

(C) 2

(D) 1

(E) 0

Zadanie 8.

Zmienne losowe $X_1, X_2, \dots, X_n$, $n > 2$, są niezależne o tym samym rozkładzie o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{gdy } x \in (0,1) \\ 0 & \text{gdy } x \notin (0,1) \end{cases}.$$

Niech $M = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ i $z \in (0,1)$. Wtedy $E(M \mid X_1 = z)$ jest równa

(A) $\frac{2n-2}{2n-1} \cdot \left(1 - z^{2n-1}\right) + z$

(B) $\frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{1 - z^{2n-1}}{1 - z^{2n-2}}$

(C) $\frac{2n-2+z^{2n-1}}{2n-1}$

(D) $\frac{2n}{2n+1} \cdot \left(1 - z^{2n-1}\right) + z$

(E) $\frac{2n+z^{2n-1}}{2n+1}$

Zadanie 9.

Niech $N, X_1, X_2, \ldots, Y_1, Y_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi przy danym $\Lambda = \lambda$. Zmienne X_i, $i = 1,2,\ldots$, mają warunkowe rozkłady wykładnicze o wartości oczekiwanej $\frac{1}{\lambda}$, zmienne losowe Y_i, $i = 1,2,\ldots$, mają warunkowe rozkłady wykładnicze o wartości oczekiwanej $\frac{2}{\lambda}$, przy danym $\Lambda = \lambda$. Warunkowy rozkład zmiennej losowej N przy danym $\Lambda = \lambda$ jest rozkładem Poissona o wartości oczekiwanej λ. Rozkład brzegowy zmiennej Λ jest rozkładem gamma o gęstości

$$f(\lambda) = \begin{cases} \frac{8}{3}\lambda^3 e^{-2\lambda} & \text{gdy } \lambda > 0 \\ 0 & \text{gdy } \lambda \le 0 \end{cases}.$$

Niech

$$S = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} X_i & \text{gdy } N > 0 \\ 0 & \text{gdy } N = 0 \end{cases} \quad \text{i} \quad T = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} Y_i & \text{gdy } N > 0 \\ 0 & \text{gdy } N = 0 \end{cases}.$$

Oblicz współczynnik korelacji $Corr(S,T)$.

(A) $\frac{1}{2}$

(B) 1

(C) 0

(D) $\frac{1}{3}$

(E) $\frac{3}{4}$

Zadanie 10.

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu normalnego $N(m_1, \sigma^2)$, a $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{10}$ niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu normalnego $N(m_2, \sigma^2)$. Wszystkie zmienne są niezależne, a parametry m_1, m_2, σ są nieznane. Testujemy hipotezę $H: m_1 = m_2$ przy alternatywie $K: m_1 \neq m_2$. Hipotezę H odrzucamy, gdy spełniona jest nierówność

$$\frac{|\overline{X} - \overline{Y}|}{S} > c,$$

gdzie $\overline{X} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} X_i$, $\overline{Y} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} Y_i$ i $S^2 = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}(X_i - Y_i)^2$.

Wyznacz c tak, aby rozmiar testu był równy 0,05.

A) 2,262

(B) 0,754

(C) 2,759

(D) 0,362

(E) 0,602

Egzamin dla Aktuariuszy z 2 czerwca 2008 r.

Prawdopodobieństwo i statystyka

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko: ....
Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja
1	E	
2	D	
3	B	
4	D	
5	E	
6	C	
7	D	
8	C	
9	A	
10	E	

· Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.
· Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.