

Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

LXI Egzamin dla Aktuariuszy z 1 października 2012 r.

Część II

Matematyka ubezpieczeń życiowych

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej:

Czas egzaminu: 100 minut

Warszawa, 1 października 2012 r.

1. Rozważamy populację, w której rozkład trwania życia spełnia dla każdego wieku $x \geq 0$ równanie

$$E(T(x)) = e^{-kx}$$

gdzie $k \in (0,1)$ jest parametrem. Wówczas funkcja przeżycia $s(x)$ wyraża się wzorem

(A) $s(x) = \text{Exp}\left(\frac{1}{k} - kx - \frac{e^{kx}}{k}\right)$

(B) $s(x) = \text{Exp}\left(\frac{1}{k} + kx - \frac{e^{kx}}{k}\right)$

(C) $s(x) = \text{Exp}\left(-\frac{1}{k} + kx - \frac{e^{kx}}{k}\right)$

(D) $s(x) = \text{Exp}\left(-\frac{1}{k} - kx - \frac{e^{kx}}{k}\right)$

- (E) żaden z powyższych wzorów nie jest uniwersalnie prawdziwy.

2. Rozważamy dyskretny typ bezterminowego ubezpieczenia na życie osoby w wieku 60 lat z populacji de Moivre'a z granicznym wiekiem 100 lat. Ubezpieczenie wypłaca rosnące świadczenie $Z(k + 1) = S + B(k + 1)$, na które składa się kwota bazowa $S = 100\ 000$ oraz bonus na koniec $k+1$ roku ubezpieczenia $B(k + 1)$. W momencie wystawienia polisy $B(0) = B$, a następnie bonus rośnie do poziomu $B(n) = a \cdot S + (1 + b)B(n - 1)$.

Wyznacz jednorazową składkę netto za to ubezpieczenie, jeżeli:

$$S = 100\ 000 \quad B = 10\ 000 \quad a = 2\% \quad b = 4\% \quad i = 5\%$$

Wskaż najbliższą wartość.

- (A) 70 780 (B) 70 860 (C) 70 920 (D) 70 980
(E) 71 060

3. Rozważmy następujące dwie polisy emerytalne dla kobiety w początkowym wieku (20). Polisa E1 polega na tym, że przez najbliższe 45 lat będzie ona płacić coroczną składkę w wysokości 1, a po dożyciu wieku 65 zacznie otrzymywać emeryturę dożywotnią w wysokości E_1 na początku roku.

Polisa E2 natomiast działa tak, że przez najbliższe 40 lat kobieta płaci coroczną składkę w wysokości 1, a po dożyciu wieku 60 zaczyna otrzymywać emeryturę dożywotnią, przy czym przez pierwsze 5 lat emerytura coroczna jest dwukrotnie mniejsza niż docelowa w wysokości E_2 ; pierwszą emeryturę w wysokości E_2 otrzyma dopiero w wieku 65.

Oblicz E_2/E_1 . Dane są:

$$N_{20} = 680000, \quad N_{60} = 42000, \quad N_{65} = 25000.$$

Wskaż najbliższą wartość.

- (A) 0,73 (B) 0,78 (C) 0,83 (D) 0,88
(E) 0,93

4. Osoba urodzona 2 kwietnia kupuje w wieku x lat (x jest liczbą całkowitą) rentę życiową, dającą wypłatę 10 000 zł każdego 2 stycznia, jednak nie więcej niż 20 kolejnych wypłat. Podaj jednorazową składkę netto za to ubezpieczenie, jeżeli:

$$\ddot{a}_{x:\overline{20}|} = 5,880 \quad q_x = 0,0420 \quad {}_{20}q_x = 0,8840 \quad i = 10\%$$

Przyjmij, że śmiertelność ma jednostajny rozkład w każdym roczniku. Zwróć uwagę na dokładność obliczeń. Wskaż najbliższą wartość

- (A) 51 210 (B) 51 240 (C) 51 270 (D) 51 300
(E) 51 330

5. Rozważmy 40-letnie ubezpieczenie na dożycie dla (25). Wiadomo, że

$$N_{25} = 513183, \quad N_{65} = 24896 \quad N_{66} = 22219.$$

Oblicz wewnętrzną stopę zwrotu z tego ubezpieczenia dla ubezpieczonego pod warunkiem, że dożywa wieku 65. Wskaż najbliższą odpowiedź.

- (A) 6,17% (B) 6,41% (C) 6,65% (D) 6,89%
(E) 7,13%.

6. Rozważamy ciągły model ubezpieczenia ogólnego typu. Załóżmy, że dla dowolnych $0 \leq t_1 < t_2$ mamy

$$\pi^s(t_2) = \pi^s(t_1) \cdot e^{\delta(t_2-t_1)}$$

gdzie δ oznacza techniczną intensywność oprocentowania. Wiadomo ponadto, że $\delta = 0,03$ oraz $\pi^s(0) = 0,37$. Oblicz $V(17)$. Wskaż najbliższą odpowiedź.

- (A) 10,1 (B) 10,3 (C) 10,5 (D) 10,7
(E) 10,9

7. Rozpatrujemy dyskretny typ 25-letniego ubezpieczenia na życie i dożycie z sumą ubezpieczenia 100 000 dla osoby (50). Roczna składka brutto płacona jest na początku pierwszych 15 lat ubezpieczenia, raz w roku, na początku roku, w stałej wysokości.

Jednorazowe koszty wystawienia polisy wynoszą 3% sumy ubezpieczenia i są rezerwowane metodą Zillmera. Roczne koszty administracyjne wynoszą 8% sumy ubezpieczenia w pierwszym roku, a następnie 4% sumy ubezpieczenia w pozostałych latach ważności ubezpieczenia. Koszty administracyjne są ponoszone w czterech równych ratach kwartalnych, na początku kwartału.

Wyznacz rezerwę brutto po 10 latach ubezpieczenia, jeśli rezerwa netto wyniosła 24 180, a ponadto dane są:

$$\begin{aligned} D_{50} &= 7\,703 & D_{60} &= 2\,601 & D_{75} &= 363 \\ N_{50} &= 71\,068 & N_{52} &= 56\,425 & N_{60} &= 21\,067 & N_{65} &= 10\,640 \\ N_{75} &= 2\,095 \end{aligned}$$

$$\alpha(4) = 1,0007 \quad \beta(4) = 0,39.$$

Przyjmij, że śmiertelność ma jednostajny rozkład w ciągu każdego roku. Wskaż najbliższą wartość rezerwy brutto.

- (A) 30 980 (B) 31 400 (C) 31 820 (D) 32 240
(E) 32 660

8. Rozważamy ubezpieczenie na życie dla niej (x) i niego (y). Wypłaci ono 1 w momencie pierwszej śmierci. Natomiast składka będzie płacona do pierwszej śmierci z odpowiednio dobraną stałą intensywnością netto $\bar{P}_{x:y}$. Oblicz przybliżoną wartość $\bar{P}_{x+\frac{1}{4}:y+\frac{1}{4}}$. Dane są

$$\delta = 0,049; \quad \mu_x = 0,001; \quad \mu_y = 0,0025; \quad \bar{P}_{x:y} = 0,0224.$$

Zakładamy, że ich życia są niezależne. Wskaż najbliższą odpowiedź.

- (A) 0,02258 (B) 0,02274 (C) 0,02290 (D) 0,02306
(E) 0,02322

9. 10-letnia terapia obejmuje 5-letnią fazę intensywnego leczenia, a później 5-letni okres leczenia zachowawczego. W momencie przystąpienia do terapii pacjenci wykupują ubezpieczenie, które wypłaca – ale tylko pacjentom, którzy przeszli do fazy leczenia zachowawczego – 100 000 za śmierć w okresie terapii lub 10 000 za wyzdrowienie w okresie terapii. Świadczenia są wypłacane w momencie zdarzenia. Wyzdrowienie w dowolnej fazie terapii kończy ważność ubezpieczenia.

Dane na temat ubytków w fazie intensywnej terapii pochodzą z tablic niezależnych ubytków. Średnia (centralna) stopa wyzdowień wynosi $m^{(w_1)} = 0,10$ rocznie, a intensywność śmiertelności $\mu^{(d_1)} = 0,15$ na rok. Wyzdrowienia mają w tej fazie jednostajny rozkład w ciągu roku.

Dane dla okresu leczenia zachowawczego uwzględniają wykluczanie się ubytków. Intensywność wyzdowień jest stała i wynosi $\mu^{(w_2)} = 0,20$ rocznie, a intensywność śmiertelności $\mu^{(d_2)} = 0,05$ rocznie.

Podaj jednorazową składkę netto za to ubezpieczenia dla intensywności oprocentowania $\delta = 0,05$. Wskaż najbliższą wartość.

- (A) 3 945 (B) 3 995 (C) 4 045 (D) 4 095
(E) 4 145

- 10.** Rozpatrujemy ciągły model planu emerytalnego. Po osiągnięciu wieku emerytalnego 65 lat plan wypłaca emeryturę z roczną intensywnością 400 zł za każdy rok stażu w planie. Składka emerytalna, ustalona metodą *entry-age*, jest płacona ze stałą roczną intensywnością.
- Wypadanie z planu przed wiekiem emerytalnym opisuje prawo de Moivre'a z granicznym wiekiem 120 lat. Jeśli wypadający otrzymują świadczenia, to są one finansowane z innych zasobów planu. Po przejściu na emeryturę uczestnicy wymierają według prawa de Moivre'a z granicznym wiekiem 95 lat.
- Wyznacz wartość obecną przyszłych składek 50-letniego uczestnika, który przystąpił do planu w wieku 25 lat. Przyjmij $\delta = 0,04$.
- Wskaż najbliższą wartość.

- (A) 11 830 (B) 12 360 (C) 12 890 (D) 13 420
(E) 13 950

LXI Egzamin dla Aktuariuszy z 1 października 2012 r.**Matematyka ubezpieczeń życiowych****Arkusz odpowiedzi***

Imię i nazwisko :Klucz odpowiedzi.....

Pesel

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja ♦
1	B	
2	E	
3	A	
4	D	
5	B	
6	C	
7	A	
8	B	
9	C	
10	A	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.