Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

LVIII Egzamin dla Aktuariuszy z 3 października 2011 r.

Część II

Matematyka ubezpieczeń życiowych

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej: ....

Czas egzaminu: 100 minut

Warszawa, 3 października 2011 r.

1. Rozważamy populację Gompertza z funkcją intensywności śmiertelności postaci $\mu_{x+t} = B\,1{,}05^{x+t}$. Niech przedział wiekowy $[x,\ x+10]$ charakteryzuje się tym, że największe jest w nim prawdopodobieństwo śmierci noworodka (spośród wszystkich przedziałów 10-letnich). Oblicz ${}_{10}p_x$.

(A) 0,52 (B) 0,55 (C) 0,58 (D) 0,61
(E) 0,64

2. Rozważmy następującą polisę emerytalną dla (25) wylosowanego z populacji de Moivre'a z wiekiem granicznym 100. Przez najbliższe 40 lat będzie płacił składkę w formie renty życiowej ciągłej z odpowiednio dobraną intensywnością netto $\overline{P}$. Jeśli umrze w ciągu najbliższych 40 lat, uposażonym zostanie wypłacona suma ubezpieczenia 100 000 w chwili śmierci. Jeśli natomiast dożyje do wieku 65 lat to zacznie otrzymywać emeryturę dożywotnią w postaci renty życiowej z intensywnością 12 000 na rok. Dodatkowo, jeżeli umrze w wieku 65+t, gdzie $0 \leq t \leq 10$, to uposażeni otrzymają jednorazowo $100\,000\,(10-t)$ (w chwili jego śmierci).

Oblicz $\overline{P}$, jeśli wiadomo, że techniczna intensywność oprocentowania wynosi $\delta = 0{,}04$. Wskaż najbliższą wartość.

(A) 3 020 (B) 3 070 (C) 3 120 (D) 3 170
(E) 3 220

3. Rozpatrujemy ciągły model bezterminowego ubezpieczenia rentowego dla (x), które w ciągu pierwszych 10 lat osoba żyjąca może odwołać w dowolnym momencie $0 < t < 10$, pobierając wypłatę $\overline{a}_{x+t}$ za każdą złotówkę renty. Wiadomo, że wszyscy, którzy odwołują ubezpieczenie, czynią to tuż przed śmiercią, oraz że tylko połowa umierających zdąża odwołać ubezpieczenie. Podaj wysokość jednorazowej składki netto za 1 złotówkę renty, jeśli jest to populacja wykładnicza z parametrem $\mu = 0{,}04$, a oprocentowanie $\delta = 0{,}06$.

Wskaż najbliższą wartość.

(A) 11,265 (B) 11,290 (C) 11,315 (D) 11,340
(E) 11,365

4. Niech $\overline{a}_x(\delta)$ oznacza wartość ciągłej renty życiowej wyznaczonej przy intensywności oprocentowania δ. Dla pewnej populacji wiadomo, że $\overline{a}_x(0{,}03) = 11{,}50$. Spośród niżej podanych wskaż najniższą wartość, której na pewno nie przekroczy $\overline{a}_x(0{,}04)$.

(A) 10,77 (B) 10,78 (C) 10,79 (D) 10,80
(E) 10,81

5. Rozważamy ubezpieczenie spłaty n-letniego kredytu hipotecznego w wysokości 1, który będzie spłacany przez (x) w postaci renty ciągłej n-letniej z odpowiednio dobraną stałą intensywnością (model ciągły metody równych rat). Gdy dłużnik umrze w ciągu n lat, niespłacone saldo kredytu zostanie wypłacone natychmiast bankowi. Niech $SJN(n)$ oznacza składkę jednorazową netto za to ubezpieczenie.

Intensywność oprocentowania kredytu jest równa technicznej intensywności oprocentowania używanej przez ubezpieczyciela w rachunku technicznym. Pochodna $SJN'(n)$ wyraża się wzorem:

(A) $$SJN'(n) = \frac{e^{\delta n}}{\left(e^{\delta n} - 1\right)^2}\left(\mu_{x+n} - \overline{A}^{1}_{x:\overline{n|}}\right)$$

(B) $$SJN'(n) = \frac{e^{\delta n}}{\left(e^{\delta n} - 1\right)^2}\left({}_n q_x - \overline{A}^{1}_{x:\overline{n|}}\right)$$

(C) $$SJN'(n) = \frac{\delta\, e^{\delta n}}{\left(e^{\delta n} - 1\right)^2}\left(\mu_{x+n} - \overline{A}^{1}_{x:\overline{n|}}\right)$$

(D) $$SJN'(n) = \frac{2\delta\, e^{\delta n}}{\left(e^{\delta n} - 1\right)^2}\left({}_n q_x - \overline{A}^{1}_{x:\overline{n|}}\right)$$

(E) $$SJN'(n) = \frac{\delta\, e^{\delta n}}{\left(e^{\delta n} - 1\right)^2}\left({}_n q_x - \overline{A}^{1}_{x:\overline{n|}}\right)$$

6. Dla osoby w wieku (x) dostępne są 4 warianty ubezpieczenia, wszystkie z sumą ubezpieczenia 100 000 zł, która w przypadku śmierci jest wypłacana na koniec roku śmierci. Są to:

(1) 10-letnie ubezpieczenie na życie z jednorazową składką netto 22 395 zł;

(2) 10-letnie ubezpieczenie na życie z roczną składką netto płatną przez cały okres ubezpieczenia, na początku roku, w wysokości 3 110 zł;

(3) 10-letnie ubezpieczenie na życie i dożycie z roczną składką netto płatną przez cały okres ubezpieczenia, na początku roku, w wysokości 9 120 zł;

(4) bezterminowe ubezpieczenie na życie z roczną składką netto płatną przez cały okres ubezpieczenia, na początku roku, w wysokości 4635 zł.

(x) wybiera czwarty wariant ubezpieczenia. Podaj wysokość rezerwy składek netto po 10 latach tego ubezpieczenia.

Wskaż najbliższą wartość.

(A)	24 975	(B)	25 075	(C)	25 175	(D)	25 275
(E)	25 375						

7. Rozważamy model ciągły bezterminowego ubezpieczenia na życie dla (x), które wypłaci uposażonym sumę ubezpieczenia 1 w chwili śmierci ubezpieczonego, a wcześniej będzie opłacane w postaci ciągłej, życiowej renty składek z odpowiednio dobraną intensywnością netto $\overline{P}_x$. Wówczas spełnione jest równanie różniczkowe:

(A) $$\frac{\partial\ {}_tV_x}{\partial x} - \frac{\partial\ {}_tV_x}{\partial t} + \frac{\partial \overline{P}_x}{\partial x} \cdot \overline{a}_{x+t} = 0$$

(B) $$\frac{\partial\ {}_tV_x}{\partial x} + \frac{\partial\ {}_tV_x}{\partial t} - \frac{\partial \overline{P}_x}{\partial x} \cdot \overline{a}_{x+t} = 0$$

(C) $$\frac{\partial\ {}_tV_x}{\partial x} - \frac{\partial\ {}_tV_x}{\partial t} - \frac{\partial \overline{P}_x}{\partial x} \cdot \overline{a}_{x+t} = 0$$

(D) $$\frac{\partial\ {}_tV_x}{\partial x} + \frac{\partial\ {}_tV_x}{\partial t} + \frac{\partial \overline{P}_x}{\partial x} \cdot \overline{a}_{x+t} = 0$$

(E) żadne z powyższych równań nie jest uniwersalnie prawdziwe.

8. Rozpatrujemy ciągły model dodatkowego ubezpieczenia od ciężkich chorób (*critical illness cover*), które wypłaca świadczenie , jeśli w ciągu 10 lat zostanie zdiagnozowana ubezpieczona choroba. Polisa wypłaca 50 000 zł w momencie zdiagnozowania choroby oraz dwie dalsze wypłaty po 50 000 zł w odstępach półrocznych, pod warunkiem przeżycia. Następujące oznaczenia identyfikują możliwe stany ubezpieczonego:

a	aktywny, zdrowy,
i	zdiagnozowana choroba,
d(D)	śmierć wywołana zdiagnozowaną chorobą,
d(O)	śmierć z innych przyczyn.

Niech y oznacza osiągnięty wiek, r oznacza czas, który upłynął od postawienia diagnozy. Dane są intensywności:

$\mu_y^{a\,i} = 0{,}02$ $\mu_y^{a\,d(O)} = 0{,}04$ $\mu_{y,r}^{i\,d(O)} = 0{,}05$ $\mu_{y,r}^{i\,d(D)} = 0{,}25$

oraz intensywność oprocentowania $\delta = 0{,}05$.

Wyznacz jednorazową składkę netto za to ubezpieczenie. Wskaż najbliższą wartość.

(A) 15 010 (B) 15 220 (C) 15 430 (D) 15 640
(E) 15 850

9. Bolek (*b*) i Lolek (*l*) są wylosowani niezależnie z dwóch populacji wykładniczych, przy czym $E(T(b))/E(T(l)) = 2$. Ponadto wiadomo, że $E(\min(T(b), n)) = 50{,}3415$ $E(\min(T(l), n)) = 37{,}6702$.

Oblicz $E(\min(T(b), T(l), n))$. Wskaż najbliższą wartość.

(A) 29,25 (B) 30,25 (C) 31,25 (D) 32,25
(E) 33,25

10. Osoba (x) wychodzi z OFE z kapitałem K i kupuje dożywotnią emeryturę z gwarantowanym okresem wypłat n. Gwarantowany okres jest dobrany tak, by suma wypłat (bez oprocentowania) osiągnęła co najmniej 2/3 kapitału K. Przyjmij ciągły model wypłat emerytalnych. Podaj w miesiącach długość okresu gwarancyjnego, jeżeli emeryt pochodzi z populacji o wykładniczym czasie trwania życia z $\mu = 0{,}09$, a oprocentowanie wynosi $\delta = 0{,}01$.

Wskaż najbliższą wartość.

(A) 92 (B) 94 (C) 96 (D) 98

(E) 100

LVIII Egzamin dla Aktuariuszy z 3 października 2011 r.

Matematyka ubezpieczeń życiowych

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : ....Klucz odpowiedzi...

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	D	
2	E	
3	A	
4	B	
5	E	
6	E	
7	A	
8	C	
9	A	
10	D	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi.*

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.