

Zadanie 1.

Zmienne losowe X_1, X_2 są niezależne i mają taki sam rozkład z atomami:

$$\Pr(X_1 = 0) = 6/10,$$

$$\Pr(X_1 = 1) = 1/10,$$

i gęstością: $f(x) = 3/10$ na przedziale $(0, 1)$.

Wobec tego $\Pr(X_1 + X_2 \leq 5/3)$ wynosi:

(A) 0.960

(B) 0.965

(C) 0.970

(D) 0.975

(E) 0.980

Zadanie 2.

Pewien podmiot posiada wyjściowy majątek o wartości w , i narażony jest na stratę X . Strata X jest zmienną losową o rozkładzie dwupunktowym:

- $\Pr(X = 1) = q$, $\Pr(X = 0) = 1 - q$

Podmiot ten postępuje racjonalnie, a w swoich decyzjach kieruje się maksymalizacją oczekiwanej użyteczności, przy czym jego funkcja użyteczności jest postaci:

- $u(x) = -\exp(-x)$.

Rynek ubezpieczeniowy oferuje kontrakty ubezpieczeniowe wypłacające αX za szkodę w wysokości X dla dowolnych $\alpha \in (0, 1]$, w zamian za składkę w wysokości $(1 + \theta)\alpha E(X)$.

Jeśli założymy, że $\theta = 25\%$, zaś $q = 20\%$, wtedy dla podmiotu, o którym mowa, optymalny poziom parametru α wynosi (wybierz najlepsze przybliżenie):

- (A) 67%
- (B) 71%
- (C) 73%
- (D) 76%
- (E) 78%

Zadanie 3.

Niech T oznacza moment zajścia szkody, zaś $T + X$ moment jej likwidacji. Zakładamy, że moment zajścia szkody T jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na odcinku $(0, t_0)$, zaś okres czasu X , jaki upływa od zajścia do likwidacji szkody, jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym z wartością oczekiwaną równą 2. Zakładamy, że zmienne losowe T oraz X są niezależne.

Warunkową wartość oczekiwaną $E(X|X + T > t_0)$ interpretujemy jako oczekiwany całkowity czas likwidacji takiej szkody, która w momencie czasu t_0 wciąż oczekuje na likwidację.

Granica $\lim_{t_0 \rightarrow \infty} E(X|X + T > t_0)$ wynosi:

- (A) 2
- (B) 5/2
- (C) 3
- (D) 7/2
- (E) 4

Zadanie 4.

W pewnym ubezpieczeniu proces pojawiania się szkód jest procesem Poissona z oczekiwaną liczbą szkód w ciągu roku równą 2, a wartości pojedynczych szkód (niezależne nawzajem i od procesu pojawiania się szkód) mają rozkład jednostajny na przedziale $(0, 1)$.

Ubezpieczony stosuje następującą strategię zgłaszania szkód w ciągu roku:

- Nie zgłasza szkód, dopóki nie zdarzy mu się szkoda o wartości przekraczającej $\frac{1}{2}$
- Zgłasza pierwszą szkodę, która przekroczyła wartość $\frac{1}{2}$, po czym zgłasza ewentualne następne szkody bez względu na to, jaka jest ich wartość.

Charakter ubezpieczenia jest przy tym taki, że decyzja o niezgłoszeniu danej szkody jest nieodwołalna – nie ma więc możliwości zgłoszenia danej szkody dopiero wtedy, kiedy zajdzie któraś z następnych szkód.

Oczekiwana liczba szkód zgłoszonych w ciągu roku z tego ubezpieczenia wynosi (z dobrym przybliżeniem):

- (A) 1.37
- (B) 1.30
- (C) 1.23
- (D) 1.17
- (E) 1.11

Zadanie 5.

Warunkowy rozkład wartości szkód generowanych przez pojedyncze ryzyko z pewnej populacji przy danej wartości λ parametru ryzyka Λ jest złożonym rozkładem Poissona:

- z oczekiwaną liczbą szkód równą λ , oraz
- z wartością oczekiwaną pojedynczej szkody równą $(10 + \lambda)$

Rozkład parametru ryzyka Λ w populacji jest rozkładem Gamma o wartości oczekiwanej równej $3/10$ oraz wariancji równej $3/100$.

Losujemy z tej populacji (całkowicie przypadkowo) n ryzyk, które następnie generują N_n szkód o łącznej wartości S_n . Rozważmy zachowanie się zmiennej losowej S_n/N_n , określonej oczywiście o ile liczba szkód jest większa od zera.

Granica $\lim_{n \rightarrow \infty} E\left(\frac{S_n}{N_n} \mid N_n > 0\right)$ wynosi:

- (A) 10.12
- (B) $10\frac{3}{11}$
- (C) 10.30
- (D) $10\frac{4}{11}$
- (E) 10.40

Zadanie 6.

Rozważamy klasyczny model procesu nadwyżki ubezpieczyciela z czasem ciągłym:

- skumulowana wartość szkód $S(t)$ jest procesem złożonym Poissona, w którym intensywność pojawiania się szkód wynosi $\lambda = 300$, zaś rozkład wartości pojedynczej szkody dany jest na półosi dodatniej gęstością:

$$f_Y(x) = \frac{1}{12} [\exp(-x/4) + \exp(-x/8)]$$

- intensywność składki (napływającej w sposób ciągły) wynosi $c = 2500$.
- Wiadomo, że przy takich założeniach funkcja prawdopodobieństwa ruiny (jako funkcja wysokości nadwyżki początkowej u) jest postaci:

$$\Psi(u) = a_1 \exp(-r_1 u) + a_2 \exp(-r_2 u),$$

Suma parametrów tego wzoru ($a_1 + a_2$) wynosi:

(A) $\frac{3}{5}$

(B) $\frac{2}{3}$

(C) $\frac{3}{4}$

(D) $\frac{4}{5}$

(E) $\frac{5}{6}$

Zadanie 7.

Wiemy, że rozkład liczby szkód N określony na zbiorze $\{0,1,2,3, \dots\}$ jest rozkładem niezdegenerowanym, a ciąg prawdopodobieństw tego rozkładu spełnia równanie rekurencyjne:

$$\bullet \Pr(N = n) = \left(a + \frac{b}{n}\right) \Pr(N = n - 1), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Wobec tego wariancja zmiennej losowej N dana jest wzorem:

(A) $\frac{b+a}{1-a}$

(B) $\frac{b}{1-a}$

(C) $\frac{b+a}{(1-a)^2}$

(D) $\frac{b}{(1-a)^2}$

(E) żaden z powyższych wzorów nie pokrywa wszystkich przypadków rozkładów niezdegenerowanych spełniających podane równanie rekurencyjne

Zadanie 8.

Kierowca, którego charakteryzuje wartość q parametru ryzyka Q , zgłasza szkody (jedną lub więcej) w ciągu roku z prawdopodobieństwem q , zaś nie zgłasza szkód z prawdopodobieństwem $p = 1 - q$, przy czym zdarzenia te w kolejnych latach są zdarzeniami niezależnymi. Jeśli kierowcę z tej populacji przypadkowo wylosujemy, to charakteryzującą go wartość parametru q traktujemy jako realizację zmiennej losowej Q . Populacja jest niejednorodna, w związku z czym $\text{var}(Q) > 0$.

Zakładamy, że populacja jest zamknięta (starzy kierowcy nie znikają, nowi się nie pojawiają). Kierowcy migrują pomiędzy klasami bardzo prostego, 3-klasowego systemu bonus-malus. W systemie tym każdy kierowca, który w danym roku zgłosił jedną lub więcej szkód, łąduje w roku następnym w klasie pierwszej (z najwyższą składką). Jeśli jednak nie zgłosił żadnej szkody, wtedy:

- Łąduje w klasie drugiej, o ile w danym roku był w klasie pierwszej;
- Łąduje w klasie trzeciej, o ile w danym roku był w klasie drugiej lub trzeciej.

Na podstawie obserwacji ustaliliśmy, że frakcja kierowców z tej populacji przebywających w klasie pierwszej wynosi 20%, w klasie drugiej 8%, zaś w klasie trzeciej 72%. Oczywiście pominęliśmy przy tym obserwacje z pierwszych paru lat funkcjonowania systemu bonus-malus, kiedy przynależność do klasy zależała jeszcze od klasy startowej.

Jeśli przyjmiemy, że nasze oceny 20%, 8% oraz 72% nie są obarczone błędem, to wynika z tego, że $\text{var}(Q)$ wynosi:

- (A) 0.08
- (B) 0.07
- (C) 0.06
- (D) 0.05
- (E) 0.04

Zadanie 9.

Modelujemy przebiegający w czasie proces ściągania należności regresowych przez ubezpieczyciela. Niech T oznacza zmienną losową o rozkładzie:

- ciągłym na przedziale $(0, +\infty)$
- z pewną masą prawdopodobieństwa w punkcie $+\infty$, reprezentującą czas ściągnięcia należności regresowej (liczony od momentu powstania prawa do regresu). Niech f_T , F_T oraz h_T oznaczają odpowiednio funkcję gęstości, dystrybuantę oraz funkcję hazardu zmiennej T . Dystrybuancie oraz funkcji hazardu nadajemy następującą interpretację:

- $F_T(t) = \int_0^t f_T(s) ds$ to wskaźnik ściągальności do czasu t (oczywiście $F_T(0) = 0$)
- $\lim_{t \rightarrow \infty} F_T(t) = \Pr(T < \infty)$ to wskaźnik ściągальności ostatecznej,
- $h_T(t) = \frac{f_T(t)}{1 - F_T(t)}$ dla $t > 0$ to natężenie procesu ściągania (gęstość ściągania należności, które do momentu t pozostają jeszcze nie ściągnięte)

Załóżmy, że natężenie procesu ściągania dane jest funkcją hazardu określoną na półosi dodatniej następująco:

- $h_T(t) = \frac{2}{2 + \exp(t)}$.

Wtedy wskaźnik ściągальności ostatecznej wynosi:

- (A) 1
- (B) 3/4
- (C) 2/3
- (D) 1/2
- (E) 1/3

Zadanie 10.

Niech N oznacza liczbę szkód zaszłych w ciągu roku z pewnego ubezpieczenia, z czego:

- M to liczba szkód zgłoszonych przed końcem tego roku,
- K to liczba szkód które zostaną zgłoszone w ciągu lat następnych,
- Zachodzi oczywiście $N = M + K$.

Liczba szkód zgłoszonych przed końcem roku:

- $M = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_N$,

jest sumą składników, z których każdy przyjmuje wartość jeden gdy daną szkodę zgłoszono w ciągu roku, zaś zero, gdy zgłoszenie nastąpiło później. Przyjmujemy, że zmienne losowe N, Z_1, Z_2, Z_3, \dots są niezależne, oraz iż Z_1, Z_2, Z_3, \dots mają taki sam rozkład:

- $\Pr(Z_1 = 1) = 1/4, \quad \Pr(Z_1 = 0) = 3/4$.

Jeśli teraz założymy, że liczba szkód zaszłych w ciągu roku ma rozkład ujemny dwumianowy o postaci:

- $\Pr(N = n) = (n + 1) \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$,

to prawdopodobieństwo warunkowe $\Pr(K = 1 | M = 1)$ wyniesie:

- (A) 9/128
- (B) 9/64
- (C) 27/128
- (D) 81/256
- (E) 81/128

Egzamin dla Aktuariuszy z 8 grudnia 2014 r.**Matematyka ubezpieczeń majątkowych****Arkusz odpowiedzi***

Imię i nazwisko :KLUCZ ODPOWIEDZI.....

Pesel

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja ♦
1	B	
2	B	
3	E	
4	A	
5	E	
6	D	
7	C	
8	A	
9	C	
10	D	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.