Zadanie 1.
Zmienne losowe X_1, X_2 są niezależne i mają rozkład z atomami:

$$\Pr(X_1 = 0) = 3/8,$$
$$\Pr(X_1 = 1) = 1/8,$$

i gęstością: $f(x) = x$ na przedziale $(0, 1)$.
Wobec tego $\Pr(X_1 + X_2 \leq 1)$ wynosi:

(A) 125/192

(B) 120/192

(C) 117/192

(D) 112/192

(E) 89/192

Zadanie 2.
Pewne ryzyko generuje w kolejnych czterech kwartałach roku szkody o łącznej wartości odpowiednio $X_1, X_2, X_3\ X_4$. Zmienne losowe X_i mają identyczny rozkład wykładniczy i są nawzajem niezależne.
Ubezpieczyciel pokrywa łączną wartość szkód za cały rok, ceduje jednak na reasekuratora łączną wartość szkód z jednego, wybranego przez siebie ex post kwartału (oczywiście wybierze najgorszy z nich). Jaki jest udział składki reasekuracyjnej w składce ubezpieczeniowej (obie składki policzone są według ich wartości oczekiwanej)?

(A) 19/48

(B) 21/48

(C) 23/48

(D) 25/48

(E) 27/48

Zadanie 3.
Liczba szkód N z pewnego ryzyka ma rozkład Poissona z wartością oczekiwaną równą λ, a wartości kolejnych szkód $Y_1, Y_2, \ldots, Y_N$ są zmiennymi losowymi o identycznym rozkładzie. Zmienne N oraz $Y_1, Y_2, \ldots, Y_N$ są niezależne.
Rozkład wartości pojedynczej szkody określony jest na przedziale $(0,1]$ i ma wartość oczekiwaną równą $\mu \in (0,1)$.

Ubezpieczyciel wystawia na to ryzyko polisę z sumą ubezpieczenia 1, z pokryciem każdej kolejnej szkody proporcjonalnym do „nieskonsumowanej do tej pory” części sumy ubezpieczenia, a więc:

- za (ewentualną) szkodę Y_1 wypłaca odszkodowanie w pełnej wysokości Y_1, po czym suma ubezpieczenia kurczy się do kwoty $(1-Y_1)$
- za (ewentualną) szkodę Y_2 wypłaca odszkodowanie w wysokości $(1-Y_1)\cdot Y_2$, po czym aktualna suma ubezpieczenia kurczy się do kwoty $(1-Y_1)\cdot(1-Y_2)$
- za (ewentualną) szkodę Y_3 wypłaca odszkodowanie w wysokości $(1-Y_1)\cdot(1-Y_2)\cdot Y_3$, po czym aktualna suma ubezpieczenia kurczy się do kwoty $(1-Y_1)(1-Y_2)(1-Y_3)$, itd.

Składka netto za to ubezpieczenie wynosi:

(A) $\mu\cdot\left(1-e^{-\lambda\mu}\right)$

(B) $\dfrac{\mu}{1-\mu}\cdot e^{-\lambda\mu}\cdot\left(1-e^{-\lambda\cdot(1-\mu)}\right)$

(C) $1-e^{-\lambda\mu}$

(D) $\dfrac{\mu}{1-\mu}\cdot\left(1-e^{-\lambda\cdot(1-\mu)}\right)$

(E) $1-\mu\cdot e^{-\lambda\mu}$

Zadanie 4.
Rozważamy klasyczny proces nadwyżki ubezpieczyciela postaci:
$U(t) = u + c \cdot t - S(t)$, gdzie:

- $S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$,
- $N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem częstotliwości λ
- $Y_1, Y_2, \ldots$ są wartościami kolejnych szkód, o identycznym rozkładzie wykładniczym z wartością oczekiwaną μ
- proces $N(t)$ i zmienne $Y_1, Y_2, \ldots$ są niezależne
- $c = 1$ oraz $\lambda \cdot \mu < 1$, (składka równa 1 na jednostkę czasu, oczekiwany przyrost łącznej wartości szkód mniejszy od 1).

Niech $0 < a < u$. Niech

$$T_a = \begin{cases} \min\{t > 0 : U(t) < a\}, & gdy \quad \{t > 0 : U(t) < a\} \neq \emptyset; \\ \infty & gdy \quad \{t > 0 : U(t) < a\} = \emptyset, \end{cases}$$

$$T_0 = \begin{cases} \min\{t > 0 : U(t) < 0\}, & gdy \quad \{t > 0 : U(t) < 0\} \neq \emptyset; \\ \infty & gdy \quad \{t > 0 : U(t) < 0\} = \emptyset. \end{cases}$$

Prawdopodobieństwo warunkowe:
$$Pr(T_a = T_0 | T_0 < \infty)$$
wynosi:

(A) $\exp\left[-a\left(\frac{1}{\mu} - \lambda\right)\right]$

(B) $\exp[-a/\mu]$

(C) $\exp[-a\lambda]$

(D) $\exp[-a\lambda/u]$

(E) $\exp\left[-\frac{a}{u\mu}\right]$

Zadanie 5.

W pewnym rodzaju ubezpieczenia każde ryzyko generuje szkodę (co najwyżej jedną) z takim samym prawdopodobieństwem. Jeśli do szkody z pewnego ryzyka dojdzie, a wartość parametru B dla tego ryzyka wynosi β, to wartość tej szkody jest zmienną losową o gęstości:

$$f_{Y|B=\beta}(y) = \beta \cdot e^{-\beta \cdot y}.$$

Populacja ryzyk charakteryzuje się dużym zróżnicowaniem. Parametr ryzyka B ma w tej populacji rozkład jednostajny na przedziale $(0,1)$. Rozkład wartości szkody z losowo wybranego ryzyka z tej populacji, pod warunkiem że to ryzyko wygenerowało szkodę, dany jest gęstością:

(A) $f_Y(y) = \frac{1}{y} \cdot (1 - e^{-y})$

(B) $f_Y(y) = \frac{1}{y^2} \cdot (1 - e^{-y})$

(C) $f_Y(y) = \frac{1}{y^2} \cdot (1 - y \cdot e^{-y})$

(D) $f_Y(y) = \frac{1}{y} \cdot (1 - e^{-y} - y \cdot e^{-y})$

(E) $f_Y(y) = \frac{1}{y^2} \cdot (1 - e^{-y} - y \cdot e^{-y})$

Zadanie 6.

Rozważmy portfel składający się z n jednakowych, niezależnych ryzyk. Dla każdego z tych ryzyk może wystąpić co najwyżej jedna szkoda, a prawdopodobieństwo jej wystąpienia wynosi q. Jeśli do szkody dojdzie, to jej wartość jest zmienną losową o gęstości:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1+x)^2} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

Niech M oznacza największą ze szkód z tego portfela (lub zero, jeśli łączna liczba szkód wyniosła zero).

Jeśli przyjmiemy:

$n = 16$, oraz

$q = 0.424$,

to mediana zmiennej M w przybliżeniu wyniesie:

(A) 4

(B) 5

(C) 7

(D) 9

(E) 13

Zadanie 7.
Dla rozkładu liczby szkód $N \in \{0,1,2,3,\dots\}$ spełnione jest równanie rekurencyjne:
$\Pr(N = n) = \left(a + \frac{b}{n}\right)\Pr(N = n - 1), \quad n = 1,2,3,\dots.$
Niech $p_0(a, b)$ wyraża prawdopodobieństwo iż nie zajdzie żadna szkoda jako funkcję parametrów równania a i b.
Wobec tego $p_0(-2, 10)$ wynosi:

(A) 1/243

(B) 1/81

(C) 32/243

(D) 16/81

(E) nie istnieje takie nieujemne p_0, dla którego zadane równanie rekurencyjne przy podanych wartościach a oraz b generuje dopuszczalny ciąg prawdopodobieństw

Zadanie 8.
Liczby szkód $N_1,...N_t, N_{t+1}, N_{t+2}$ w kolejnych latach są, dla ustalonej wartości parametru $\Lambda = \lambda$, warunkowo niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie Poissona z wartością oczekiwaną λ. Niech $N = N_1 + ... + N_t$. Parametr Λ jest zmienną losową o rozkładzie gamma o gęstości:

$$f(\lambda) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot \lambda^{\alpha-1} \cdot e^{-\beta\cdot\lambda}, \ \lambda > 0$$

z parametrami (α, β) o wartościach dodatnich.
Warunkowa kowariancja

$$\operatorname{cov}(N_{t+1}, N_{t+2} | N_1, N_2, \dots, N_t)$$

wynosi:

(A) $\dfrac{\alpha + N}{(\beta + t)^2}$

(B) $\dfrac{\alpha + N}{\beta + t}$

(C) $\dfrac{\alpha}{\beta} + \dfrac{\alpha + N}{(\beta + t)^2}$

(D) $\dfrac{\alpha + N}{\beta + t} + \dfrac{\alpha + N}{(\beta + t)^2}$

(E) $\dfrac{\alpha + N}{\beta + t} + \dfrac{\alpha}{\beta^2}$

Zadanie 9.
W pewnym ubezpieczeniu liczba szkód, które w ciągu *t* lat wygeneruje ubezpieczony charakteryzujący się wartością λ parametru ryzyka Λ jest procesem Poissona o intensywności λ (rocznie).
Zakładamy, że rozkład wartości parametru ryzyka Λ w populacji wszystkich ubezpieczonych (tak naszych, jak i tych, którzy ubezpieczają się u konkurentów) dany jest na półosi dodatniej gęstością:

- $f_\Lambda(\lambda) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\lambda^{\alpha-1}\exp(-\beta\lambda)$, gdzie $(\alpha, \beta) = (2, 9)$

Załóżmy, że w pierwszym roku tak nasza firma, jak i firmy konkurencyjne proponowały wszystkim ubezpieczenie w zamian za tę samą składkę. W drugim roku nasza firma kontynuuje praktykę z roku poprzedniego, natomiast konkurenci wprowadzili składki niższe od przeciętnej za bezszkodowy przebieg ubezpieczenia w pierwszym roku, zaś wyższe od przeciętnej odpowiednio dla ubezpieczonych, którzy mieli w pierwszym roku szkody. Zakładając, że wszyscy ubezpieczeni wybiorą tego ubezpieczyciela, który jest dla nich tańszy, oczekiwana częstotliwość szkód w drugim roku (w przeliczeniu na jednego ubezpieczonego) w naszej firmie wzrośnie w stosunku do pierwszego roku o:

(A) ponad 52%

(B) wskaźnik mieszczący się pomiędzy 48% a 52%

(C) wskaźnik mieszczący się pomiędzy 44% a 48%

(D) wskaźnik mieszczący się pomiędzy 40% a 44%

(E) mniej niż 40%

Zadanie 10.
Niech N oznacza liczbę szkód zaszłych w ciągu roku z pewnego ubezpieczenia, z czego:

- M to liczba szkód zgłoszonych przed końcem tego roku
- K to liczba szkód które zostaną zgłoszone w ciągu lat następnych.

Liczba szkód zgłoszonych przed końcem roku:

$$M = M_1 + M_2 + \cdots + M_N$$

Jest sumą składników, z których każdy przyjmuje wartość jeden gdy daną szkodę zgłoszono w ciągu roku, zaś zero, gdy zgłoszenie nastąpiło później.
Przyjmujemy, że M ma rozkład złożony (*a więc liczba składników oraz wartość każdego z nich to niezależne zmienne losowe, zaś wszystkie składniki mają ten sam rozkład*).

Załóżmy, że liczba szkód zaszłych N ma rozkład dwumianowy o parametrach $(n, q) = \left(10, \frac{2}{5}\right)$, z wartością oczekiwaną równą 4, zaś zmienna wskazująca na zgłoszenie szkody w ciągu danego roku ma także rozkład dwumianowy o parametrach $(n, q) = \left(1, \frac{1}{2}\right)$, a więc prawdopodobieństwo zgłoszenia szkody w ciągu roku wynosi ½.
Wobec tego warunkowa wartość oczekiwana $E(K|M = 3)$ wynosi:

(A) 16/7

(B) 15/7

(C) 2

(D) 13/8

(E) 7/4

Egzamin dla Aktuariuszy z 29 września 2014 r.

Matematyka ubezpieczeń majątkowych

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ : ....K L U C Z   O D P O W I E D Z I.........................

~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	A	
2	D	
3	C	
4	C	
5	E	
6	D	
7	B	
8	A	
9	D	
10	E	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.
♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.