Zadanie 1.

Zmienne losowe X_1, X_2, X_3, X_4 są niezależne i mają rozkład z atomami:

$$\Pr(X_1 = 0) = 0.3,$$
$$\Pr(X_1 = 1) = 0.1,$$

i gęstością: $f(x) = 0.6$ na przedziale $(0, 1)$.

Wobec tego $\Pr(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \leq 1)$ wynosi:

(A) 0.2295

(B) 0.2403

(C) 0.2457

(D) 0.2511

(E) 0.2619

Zadanie 2.
Niech:

- Y będzie zmienną losową o rozkładzie Gamma $(\alpha, 1)$, z wartością oczekiwaną równą wariancji, równą α;
- R będzie liczbą z przedziału $(0,1)$.

Wtedy:

$$\inf_{d>0} \mathrm{E}\{exp[R(Y-d)]|Y>d\}$$

wynosi:

(A) $\frac{1}{1-R}$ dla $\alpha > 1$, zaś $\left(\frac{1}{1-R}\right)^{\alpha}$ dla $\alpha \in (0,1)$

(B) $\left(\frac{1}{1-R}\right)^{\alpha}$ dla $\alpha > 1$, zaś $\frac{1}{1-R}$ dla $\alpha \in (0,1)$

(C) jeden dla dowolnych $\alpha > 0$

(D) $\frac{1}{1-R}$ dla dowolnych $\alpha > 0$

(E) $\left(\frac{1}{1-R}\right)^{\alpha}$ dla dowolnych $\alpha > 0$

Zadanie 3.
Niech:

- N oznacza liczbę roszczeń z jednego wypadku ubezpieczeniowego, zaś:
- $T_1, T_2, ..., T_N$ oznacza czas, jaki upływa od momentu zajścia wypadku do zgłoszenia roszczenia odpowiednio 1-go, 2-go,…, N-tego (numeracja roszczeń od 1-go do N-tego jest całkowicie przypadkowa, nie wynika więc z chronologii ich zgłaszania)

Załóżmy, że:

- zmienne losowe $N, T_1, T_2, T_3, ...$ są niezależne,
- zmienne losowe $T_1, T_2, T_3, ...$ mają identyczny rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej 1 (jednostką pomiaru czasu jest miesiąc)
- zmienna losowa N ma rozkład logarytmiczny dany wzorem:

$$\Pr(N = k) = \frac{1}{-\ln(1-c)} \frac{c^k}{k}, \quad k = 1,2,3,... \qquad \text{z parametrem } c = \frac{1}{3}e.$$

Właśnie pojawiło się roszczenie, i okazało się, że jest to pierwsze roszczenie z wypadku o którym dotąd nie wiedzieliśmy, a który miał miejsce miesiąc temu. Jednym słowem, wiadomo, że zaszedł wypadek, wiemy więc, że N wyniosło co najmniej 1, i że najmniejsza liczba ze zbioru $\{T_1, T_2, ..., T_N\}$, przyjęła wartość 1.

Wartość oczekiwana liczby roszczeń z tego wypadku, a więc:

$$\mathrm{E}(N | \min\{T_1, T_2, ..., T_N\} = 1)$$

wynosi:

(A) e

(B) $e - 1/2$

(C) 2

(D) $(e + 1)/2$

(E) 3/2

Zadanie 4.
Łączna wartość szkód z pewnego ryzyka:

$$S = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_N,$$

jest zmienną losową o złożonym rozkładzie Poissona. Trzy niezależne podmioty pokrywają części S_1, S_2, oraz S_3 całkowitej wartości zmiennej S:

$$S_1 = min\{d, Y_1\} + min\{d, Y_2\} + \cdots + min\{d, Y_N\},$$

$$S_3 = max\{0, Y_1 - M\} + max\{0, Y_2 - M\} + \cdots + max\{0, Y_N - M\},$$

$$S_2 = S - S_1 - S_3,$$

gdzie parametry podziału odpowiedzialności spełniają warunki $M > d > 0$.
Jeśli przyjmiemy, że:

$$\mathrm{E}(N) = 10,$$

$$d = 2,$$

$$M = 10,$$

oraz iż dystrybuanta rozkładu wartości pojedynczej szkody dana jest na półosi nieujemnej wzorem:

$$Pr(Y_1 \le y) = 1 - \left(\frac{10}{10+y}\right)^3,$$

to $cov(S_1, S_3)$ wynosi:

(A) 5

(B) 7.5

(C) 12.5

(D) 20

(E) 25

Zadanie 5.
O rozkładzie ryzyka X wiemy, że:

$\Pr(X \in [0,1]) = 1$,

$\mathrm{E}(X) = 0.2$,

$\Pr(X \leq 0.3) = 0.5$.

Rozważmy zbiór wszystkich możliwych (w świetle powyższych informacji) wartości wariancji zmiennej losowej X. Różnica pomiędzy kresem górnym a dolnym tego zbioru (rozpiętość przedziału niepewności dla wariancji) wynosi:

(A) 0.05

(B) 0.06

(C) 0.07

(D) 0.08

(E) 0.09

Zadanie 6.
Rozważamy klasyczny proces nadwyżki ubezpieczyciela, a więc proces:

$U(t) = u + (1+\theta)\lambda\mu_Y t - S_{N(t)}$, gdzie:

- $N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem intensywności λ,
- $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ (lub zero, jeśli $n = 0$)
- $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ to niezależne zmienne losowe o tym samym rozkładzie danym na półosi dodatniej gęstością: $f_Y(y) = \dfrac{\alpha v^{\alpha}}{(v+y)^{\alpha+1}}$.

Wiemy, że parametry procesu wynoszą:

- $\alpha = 2$, $v = 2$ oraz $\theta = \dfrac{1}{5}$.

Prawdopodobieństwo ruiny $\Psi(u)$, a więc zdarzenia:

- $\exists T > 0$ takie, że $U(T) < 0$

jest funkcją nadwyżki początkowej *u*. Wiadomo, że dla odpowiednio dobranych parametrów a, b, c funkcja ta spełnia zależność:

$$\lim_{u\to\infty} \Psi(u)(1+au)^b = c$$

(A) $(a,b,c) = \left(\dfrac{1}{2}, 2, 5\right)$

(B) $(a,b,c) = (1, 2, 5)$

(C) $(a,b,c) = (2, 2, 5)$

(D) $(a,b,c) = \left(\dfrac{1}{2}, 1, 5\right)$

(E) $(a,b,c) = (2, 1, 5)$

Zadanie 7.
Rozważamy zdyskontowaną na moment początkowy wartość składek pomniejszoną o wartość szkód w klasycznym procesie nadwyżki ubezpieczyciela:

$$B(t) = c\frac{1-\exp(-\delta t)}{\delta} - \sum_{k:T_k \le t} \exp(-\delta T_k) Y_k \text{ , gdzie:}$$

- ct jest sumą składek które napłynęły do momentu t,
- T_k, Y_k to moment wystąpienia i wartość bieżąca k-tej szkody
- $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots T_1, (T_2 - T_1), (T_3 - T_2), \ldots$ są niezależne
- $T_1, (T_2 - T_1), (T_3 - T_2), \ldots$ mają rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej 0.01
- $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ mają rozkład o momentach równych: $\mathrm{E}(Y_1) = 1$, $\mathrm{E}(Y_1^2) = 2$
- $\delta = 4\%$ to zakładana przy dyskontowaniu intensywność oprocentowania

Dobierz stałą c tak, aby współczynnik zmienności (odchylenie standardowe podzielone przez wartość oczekiwaną) zmiennej:

$$B(\infty) = \frac{c}{\delta} - \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-\delta T_k) Y_k$$

Wyniósł 1/2.

(A) 102

(B) $100 + 2\sqrt{2}$

(C) 104

(D) $100 + 4\sqrt{2}$

(E) 108

Zadanie 8.
Rozważamy proces nadwyżki ubezpieczyciela z czasem dyskretnym postaci:

- $U_n = u + c \cdot n - S_n$, $n = 0,1,2,...$, $S_n = W_1 + W_2 + ... + W_n$,

gdzie zmienne $W_1, W_2, W_3, ...$ są niezależne i mają ten sam rozkład dany na odcinku $(0, 2)$ gęstością:

$$f_W(x) = \frac{15}{16} x^2 (2 - x)^2$$

Jeśli parametry procesu wynoszą:

- $u = 0$, $c = 1$

to prawdopodobieństwo ruiny w horyzoncie dwóch okresów czasu (a więc prawdopodobieństwo zdarzenia, iż $U_1 < 0$ lub $U_2 < 0$) wynosi:

(A) $\frac{1}{2}$

(B) $\frac{9}{16}$

(C) $\frac{5}{8}$

(D) $\frac{11}{16}$

(E) $\frac{3}{4}$

Zadanie 9.
W pewnym ubezpieczeniu liczba szkód, które w ciągu *t* lat wygeneruje ubezpieczony charakteryzujący się wartością λ parametru ryzyka Λ jest procesem Poissona o intensywności λ (rocznie).
Zakładamy, że rozkład wartości parametru ryzyka Λ w populacji wszystkich ubezpieczonych (tak naszych, jak i tych, którzy ubezpieczają się u konkurentów) dany jest na półosi dodatniej gęstością:

- $f_\Lambda(\lambda) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha-1} \exp(-\beta\lambda)$, gdzie $(\alpha, \beta) = (2, 5)$

Załóżmy, że w pierwszym roku tak nasza firma, jak i firmy konkurencyjne proponowały wszystkim ubezpieczenie w zamian za tę samą składkę. W drugim roku nasza firma kontynuuje praktykę z roku poprzedniego, natomiast konkurenci wprowadzili składki niższe od przeciętnej za bezszkodowy przebieg ubezpieczenia w pierwszym roku, zaś wyższe od przeciętnej odpowiednio dla ubezpieczonych, którzy mieli w pierwszym roku szkody. Zakładając, że wszyscy ubezpieczeni wybiorą tego ubezpieczyciela, który jest dla nich tańszy, oczekiwana częstotliwość szkód w drugim roku (w przeliczeniu na jednego ubezpieczonego) w naszej firmie wzrośnie w stosunku do pierwszego roku o:

(A) ponad 40%

(B) wskaźnik mieszczący się pomiędzy 36% a 40%

(C) wskaźnik mieszczący się pomiędzy 33% a 36%

(D) wskaźnik mieszczący się pomiędzy 30% a 33%

(E) mniej niż 30%

Zadanie 10.
Niech N oznacza liczbę szkód zaszłych w ciągu roku z pewnego ubezpieczenia, z czego:

- M to liczba szkód zgłoszonych przed końcem tego roku
- K to liczba szkód które zostaną zgłoszone w ciągu lat następnych.

Oczywiście zachodzi $N = M + K$.
Wiadomo, że zmienne M oraz K są warunkowo (przy ustalonej wartości parametru ryzyka Λ) niezależne i mają rozkłady Poissona z parametrami odpowiednio:

- Λq - zmienna M,
- Λp - zmienna K,

gdzie $p = 1 - q$ to liczba z przedziału $(0, 1)$.
O parametrze ryzyka Λ wiadomo, że:

- ma on rozkład Gamma o wartości oczekiwanej $\frac{\alpha}{\beta}$ i wariancji $\frac{\alpha}{\beta^2}$

Oczekiwana liczba szkód zaszłych w ciągu roku pod warunkiem, że do końca roku zgłoszono m szkód, a więc:

$$\mathrm{E}(N|M = m)$$

wynosi:

(A) $m + \dfrac{\alpha + mp}{\beta + q}$

(B) $m + \dfrac{\alpha + mp}{\beta q + q}$

(C) $m + \dfrac{\alpha p + mp}{\beta q + q}$

(D) $m + \dfrac{\alpha p + mp}{\beta + q}$

(E) $m + \dfrac{\alpha + m}{\beta + q}$

Egzamin dla Aktuariuszy z 26 maja 2014 r.

Matematyka ubezpieczeń majątkowych

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ : ....KLUCZ ODPOWIEDZI...............................

~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	A	
2	A	
3	E	
4	E	
5	B	
6	D	
7	C	
8	C	
9	B	
10	D	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.