

Zadanie 1.

Mamy dany ciąg liczb $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ z przedziału $(0,1)$, oraz ciąg $\{m_1, m_2, \dots, m_n\}$ liczb dodatnich. Rozważmy dwie zmienne losowe:

- $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, gdzie X_i ma złożony rozkład dwumianowy o parametrach $(1, q_i, F_i)$, wszystkie składniki X_i są niezależne, zaś oczekiwana wartość szkody o dystrybucie F_i wynosi m_i ;
- Z o rozkładzie złożonym dwumianowym i parametrach (n, \bar{q}, F) , gdzie $\bar{q} = \frac{\sum_{i=1}^n q_i}{n}$, zaś dla każdego $x \in R$ zachodzi: $F(x) = \frac{\sum_{i=1}^n q_i F_i(x)}{\sum_{i=1}^n q_i}$.

Wprowadźmy dodatkowe oznaczenia:

$$\bar{m} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i}{n}, \text{ oraz:}$$

$$\overline{(mq)} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i q_i}{n}.$$

Różnica wariancji $var(Z) - var(X)$ dana jest wzorem:

- (A) $\sum_{i=1}^n (q_i m_i - \bar{q} \bar{m})^2$
- (B) $\sum_{i=1}^n q_i^2 (m_i - \bar{m})^2$
- (C) $\sum_{i=1}^n (q_i - \bar{q})^2 (m_i - \bar{m})^2$
- (D) $\sum_{i=1}^n [q_i m_i - \overline{(mq)}]^2$
- (E) $\sum_{i=1}^n (q_i - \bar{q})^2 m_i^2$

Zadanie 2.

Pewien podmiot maksymalizuje wartość oczekiwaną funkcji użyteczności o postaci:
 $u(x) = \ln(x)$.

Tymczasem majątek tego podmiotu wynosi w . Połowa majątku narażona jest jednak na ryzyko całkowitej utraty, co może nastąpić z prawdopodobieństwem q .

Od tego ryzyka można się na rynku ubezpieczyć. Rynek oferuje kontrakty z udziałem własnym ubezpieczonego, wyceniane według oczekiwanej wartości odszkodowania pomnożonej przez czynnik $(1 + \theta)$. Przy założeniu, iż:

$$w = 2, \quad q = 0.2, \quad \theta = 0.25$$

podmiot ten wybierze kontrakt z udziałem własnym w wysokości:

- (A) 1 (a więc nie ubezpieczy się)
- (B) $\frac{23}{30}$
- (C) $\frac{10}{15}$
- (D) $\frac{7}{15}$
- (E) 0

Zadanie 3.

Liczba zgłaszanych roszczeń ma rozkład ujemny dwumianowy z parametrami (r, q) .

Przyjmijmy typowe oznaczenie: $p = 1 - q$.

Niezależnie od przebiegu procesu zgłaszania roszczeń, każde roszczenie z prawdopodobieństwem P jest oddalane, zaś z prawdopodobieństwem $Q = 1 - P$ jest uznawane. Decyzje oddalania/uznawania kolejnych roszczeń są także nawzajem niezależne. Rozkład liczby roszczeń uznanych jest:

- (A) Ujemny dwumianowy $(r \cdot Q, q)$
- (B) Ujemny dwumianowy $\left(r, \frac{qQ}{1 - qQ}\right)$
- (C) Ujemny dwumianowy $\left(r, \frac{qQ}{1 - qP}\right)$
- (D) Ujemny dwumianowy $\left(r, \frac{qQ}{p + Q}\right)$
- (E) Nie jest to rozkład ujemny dwumianowy

Zadanie 4.

Proces nadwyżki ubezpieczyciela ma postać:

$$U(t) = u + c \cdot t - S(t)$$

gdzie:

- u - wartość początkowa nadwyżki,
- $S(t)$ - łączna wartość szkód jest złożonym procesem Poissona z parametrem częstotliwości λ ,
- wartość pojedynczej szkody ma rozkład wykładniczy
- składka c zawiera stosunkowy narzut bezpieczeństwa $\theta = 0.2$, co zapewnia iż prawdopodobieństwo ruiny w nieskończonym horyzoncie czasu $\Psi(u)$ równe

jest $\frac{1}{10}$.

Udziałowcy zwiększyli nadwyżkę początkową dwukrotnie - do wysokości $2 \cdot u$. Zakładając, iż wszystkie pozostałe parametry procesu nie uległy zmianie, prawdopodobieństwo ruiny wyniesie teraz:

- (A) 0.010
- (B) 0.012
- (C) 0.0144
- (D) $\frac{1}{144}$
- (E) za mało danych do udzielenia odpowiedzi liczbowej

Zadanie 5.

O rozkładzie pewnego ryzyka X posiadamy następujące informacje:

- znamy oczekiwaną wartość nadwyżki ponad 20:

$$E[(X - 20)_+] = 8$$

- oraz znamy następujące charakterystyki dotyczące przedziału $(10, 20]$:

$$\Pr(X \leq 20) = \frac{3}{4}$$

$$\Pr(X \leq 10) = \frac{1}{4}$$

$$E(X|10 < X \leq 20) = 13$$

Wobec tego oczekiwana wartość nadwyżki ponad 10:

$$E[(X - 10)_+],$$

wynosi:

- (A) 12
- (B) 12.5
- (C) 13
- (D) 13.5
- (E) 14

Zadanie 6.

Proces pojawiania się szkód startuje w momencie $T_0 = 0$. Niech T_n oznacza moment zajścia n -tej szkody. Ponieważ szkody numerujemy według kolejności zajścia, wobec tego zachodzi $0 < T_1 < T_2 < \dots$.

Wypłata odszkodowania za n -tą szkodę następuje w momencie $T_n + D_n$.

Założmy, iż zmienne losowe $T_1, (T_2 - T_1), (T_3 - T_2), \dots$ oraz D_1, D_2, D_3, \dots

są wszystkie nawzajem niezależne, przy czym:

- $T_1, (T_2 - T_1), (T_3 - T_2), \dots$ mają rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej 1,
- D_1, D_2, D_3, \dots mają rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej równej 2.

Prawdopodobieństwo, iż dla pewnego ustalonego n wypłata odszkodowania za szkodę $n + 1$ -szą poprzedzi wypłatę odszkodowania za szkodę n -tą wynosi:

(A) $\frac{1}{2}$

(B) $\frac{1}{3}$

(C) $\frac{1}{4}$

(D) $\frac{1}{6}$

(E) $\frac{1}{8}$

Zadanie 7.

Rozważamy proces nadwyżki ubezpieczyciela postaci:

$$U(t) = u + c \cdot t - N(t),$$

gdzie $N(t)$ jest procesem Poissona (zwykłym, a nie złożonym!) z parametrem częstotliwości λ .

Niech

$$\Psi(u) = \Pr(U(t) < 0 \text{ dla pewnego } t > 0).$$

Wiemy, że dla dowolnego $u > 1$ zachodzi:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{u+1} \leq \Psi(u) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^u.$$

Wobec tego składka c przypadająca na jednostkowy okres czasu wynosi:

(A) $\frac{e^\lambda}{\ln 2}$

(B) $\frac{1+\lambda}{\ln 2}$

(C) $\lambda \cdot e^2$

(D) $\lambda \cdot \ln 2$

(E) $\frac{\lambda}{\ln 2}$

Zadanie 8.

W pewnej niejednorodnej populacji ryzyk każde ryzyko generuje szkodę (co najwyżej jedną) z takim samym prawdopodobieństwem q , natomiast rozkłady wartości szkody zależą od parametru ryzyka B , przyjmującego dla różnych ryzyk różne wartości.

Warunkowa gęstość rozkładu wartości pojedynczej szkody Y przy danej wartości parametru ryzyka B dana jest na półosi dodatniej wzorem:

$$f_{Y|B=\beta}(y) = \beta \cdot e^{-\beta \cdot y},$$

natomiast rozkład parametru ryzyka w populacji ryzyk ma na półosi dodatniej gęstość:

$$g_B(\beta) = \beta e^{-\beta}.$$

Wobec tego prawdopodobieństwo (bezwarunkowe), iż wartość szkody losowo wybranej ze zbioru szkód, do których w ciągu roku z tej populacji dojdzie (o ile dojdzie do co najmniej jednej szkody), przekroczy 9, tzn.

$\Pr(Y > 9)$

wynosi:

- (A) 0.001
- (B) 0.005
- (C) 0.010
- (D) 0.020
- (E) 0.033

Zadanie 9.

Proces zgłaszania szkód jest poissonowski, ze stałym w czasie natężeniem (powiedzmy, rzędu wielu tysięcy rocznie).

Dla każdej zgłaszanej szkody czas, jaki upływa od momentu jej zgłoszenia do momentu likwidacji, ma rozkład wykładniczy z wartością oczekiwaną równą 1 rok.

Wybieramy pewien moment czasu t . Ze zbioru wszystkich szkód, które w tym momencie oczekują na likwidację, wybieramy losowo jedną szkodę. Oznaczmy przez T_1 moment jej zgłoszenia, zaś przez T_2 moment jej likwidacji. Oczywiście zachodzi:

$$T_1 < t < T_2$$

Przyjmujemy, iż zmienne T_1 i T_2 są dobrze określone (pomijamy jako praktycznie nieprawdopodobne zdarzenie, iż w danym momencie zbiór szkód oczekujących na likwidację jest pusty).

$E(T_2 - T_1 | T_2 > t > T_1)$ wynosi:

- (A) 1 rok
- (B) $\frac{4}{3}$ roku
- (C) $\frac{3}{2}$ roku
- (D) $\frac{5}{3}$ roku
- (E) 2 lata

Zadanie 10.

Niech przy danej wartości parametru θ łączna wartość szkód w portfelu liczącym n ryzyk:

$$S(n) = Y_1 + \dots + Y_{N(n)},$$

ma złożony rozkład Poissona o częstotliwości równej $n \cdot \lambda$ i rozkładzie pojedynczego składnika o parametrach:

$$E(Y|\Theta = \theta) = \mu(\theta)$$

$$VAR(Y|\Theta = \theta) = (\mu(\theta))^2.$$

Parametr θ rozkładu zmiennej Y pochodzi z rozkładu zmiennej losowej Θ , o którym wiemy, że:

$$E(\mu(\Theta)) = \mu$$

$$VAR(\mu(\Theta)) = a^2$$

Kwadrat współczynnika zmienności zmiennej $S(n)$, to znaczy iloraz:

$$\frac{VAR(S(n))}{[E(S(n))]^2},$$

wynosi:

$$(A) \quad \frac{a^2 + \frac{2}{n \cdot \lambda} \cdot (\mu^2 + a^2)}{\mu^2}$$

$$(B) \quad \frac{3 \cdot a^2 + 2 \cdot \mu^2}{\mu^2 \cdot n \cdot \lambda}$$

$$(C) \quad \frac{a^2 + 2 \cdot \mu^2}{\mu^2 \cdot n \cdot \lambda}$$

$$(D) \quad \frac{a^2 + \frac{1}{n \cdot \lambda} \cdot (\mu^2 + a^2)}{\mu^2}$$

$$(E) \quad \frac{3 \cdot a^2 + 2 \cdot \mu^2}{\mu^2 \cdot n^2 \cdot \lambda^2}$$

Wskazówka: zwróć uwagę, iż parametr ryzyka Θ realizuje się na tym samym poziomie dla całego portfela

Egzamin dla Aktuariuszy z 28 maja 2012 r.**Matematyka ubezpieczeń majątkowych****Arkusz odpowiedzi***

Imię i nazwiskoKLUCZ ODPOWIEDZI.....

Pesel

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja [♦]
1	D	
2	D	
3	C	
4	B	
5	A	
6	B	
7	E	
8	C	
9	E	
10	A	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.