Zadanie 1.

Mamy dany ciąg liczb $\{q_1, q_2, ..., q_n\}$ z przedziału $(0,1)$. Rozważmy trzy zmienne losowe:

- $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$, gdzie X_i ma rozkład dwumianowy o parametrach $(1, q_i)$, i wszystkie składniki są niezależne,
- Y o rozkładzie dwumianowym i parametrach $(n, \bar{q})$, gdzie $\bar{q} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} q_i$
- Z, której warunkowy rozkład (przy danej wartości Q) jest rozkładem dwumianowym z parametrami (n, Q), zaś zmienna Q ma rozkład n-punktowy taki, że $\Pr(Q = q_i) = \frac{1}{n}$, $i = 1,2,...,n$

Wariancje tych trzech zmiennych porządkują nierówności, które przyjmują postać równości jedynie w przypadku gdy wszystkie q_i są identyczne. Wybierz poprawny porządek.

(A) $\operatorname{var} X \le \operatorname{var} Y \le \operatorname{var} Z$

(B) $\operatorname{var} X \le \operatorname{var} Z \le \operatorname{var} Y$

(C) $\operatorname{var} Y \le \operatorname{var} X \le \operatorname{var} Z$

(D) $\operatorname{var} Z \le \operatorname{var} Y \le \operatorname{var} X$

(E) $\operatorname{var} Z \le \operatorname{var} X \le \operatorname{var} Y$

Zadanie 2.

Rozważamy dwie zmienne losowe o rozkładach złożonych, różniące się założeniami o rozkładzie liczby składników i rozkładzie pojedynczego składnika:

- $PL = Y_1 + \ldots + Y_N$, gdzie N ma rozkład Poissona o wartości oczekiwanej λ, zaś każdy ze składników Y_n ma rozkład logarytmiczny o funkcji prawdopodobieństwa danej wzorem $\Pr(Y_n = k) = \frac{1}{-\ln(1-c)} \cdot \frac{c^k}{k}$ dla $k = 1,2,3,\ldots$
- $LP = Y_1 + \ldots + Y_N$, gdzie N ma rozkład logarytmiczny o funkcji prawdopodobieństwa z parametrem c (jak wyżej), zaś każdy ze składników Y_n ma rozkład Poissona o wartości oczekiwanej λ.

Rozważamy jedynie dopuszczalne wartości parametrów $\lambda > 0$ oraz $c \in (0,1)$. Warunek konieczny i dostateczny, aby przy tych założeniach zachodziła nierówność:

$$\mathrm{var}(LP) > \mathrm{var}(PL)$$

można przedstawić w postaci:

(A) $\lambda > -\ln(1-c) \cdot c$

(B) $\lambda > \dfrac{-\ln(1-c) \cdot c}{-\ln(1-c) - c}$

(C) $\lambda > \dfrac{-\ln(1-c) \cdot c}{-\ln(1-c) + c}$

(D) $\lambda > -\ln(1-c)$

(E) $\lambda > \dfrac{c}{1-c}$

Zadanie 3.
Liczba szkód N ma rozkład o prawdopodobieństwach spełniających zależność rekurencyjną:

$$\frac{\Pr(N=k)}{\Pr(N=k-1)} = \frac{1}{5}\cdot\left(3+\frac{12}{k}\right), \qquad k=1,2,3,\ldots$$

Jeśli wiemy, że $\sum_{k=0}^{\infty}\Pr(N=k)=1$, to wartość oczekiwana liczby szkód $\mathrm{E}(N)$ wynosi:

(A) $2\frac{2}{3}$

(B) $4\frac{1}{2}$

(C) 6

(D) $7\frac{1}{2}$

(E) 9

Zadanie 4.
W poniższej tabeli zawarte są wybrane informacje o rozkładzie wartości pojedynczej szkody Y:

y	4	6
$\mathrm{E}(\min\{Y, y\})$	3	$3\frac{5}{6}$
$\Pr(Y \le y)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$

Z informacji tych wynika, że $\mathrm{E}(Y \mid 4 < Y \le 6)$ wynosi:

(D) $4\frac{2}{3}$

(E) $4\frac{5}{6}$

(F) 5

(D) $5\frac{1}{6}$

(E) $5\frac{1}{3}$

Zadanie 5.
Modelujemy przebiegający w czasie proces ściągania należności regresowych przez ubezpieczyciela. Niech T oznacza zmienną losową o rozkładzie:

- ciągłym na przedziale $(0,+\infty)$
- z pewną, być może dodatnią masą prawdopodobieństwa w punkcie $+\infty$,

reprezentującą czas ściągnięcia należności regresowej (liczony od momentu powstania prawa do regresu). Niech f_T, F_T oraz h_T oznaczają odpowiednio funkcję gęstości, dystrybuantę oraz funkcję hazardu zmiennej T. Dystrybuancie oraz funkcji hazardu nadajemy następującą interpretację:

- $F_T(t) = \int_0^t f_T(s)ds$ to wskaźnik ściągalności do czasu t (oczywiście $F_T(0) = 0$)
- $\lim_{t\to\infty} F_T(t) = \Pr(T < \infty)$ to wskaźnik ściągalności ostatecznej,
- $h_T(t) = \dfrac{f_T(t)}{1 - F_T(t)}$ dla $t > 0$ to natężenie procesu ściągania (gęstość ściągania należności, które do momentu t pozostają jeszcze nie ściągnięte)

Załóżmy, że natężenie procesu ściągania dane jest funkcją hazardu określoną na półosi dodatniej następująco:

- $h_T(t) = \dfrac{2}{(2+t)(1+t)}$.

Wtedy wskaźnik ściągalności ostatecznej wynosi:

(A) 1

(B) $\dfrac{4}{5}$

(C) $\dfrac{3}{4}$

(D) $\dfrac{3}{5}$

(E) $\dfrac{1}{2}$

Zadanie 6.
Proces pojawiania się szkód startuje w momencie $T_0 = 0$. Niech T_n oznacza moment zajścia *n*-tej szkody. Ponieważ szkody numerujemy według kolejności zajścia, wobec tego zachodzi $0 < T_1 < T_2 < \dots$.
Wypłata odszkodowania za *n*-tą szkodę następuje w momencie $T_n + D_n$.
Załóżmy, iż zmienne losowe $T_1, (T_2 - T_1), (T_3 - T_2), \dots$ oraz $D_1, D_2, D_3, \dots$
są wszystkie nawzajem niezależne i mają identyczny rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej równej 1.
Prawdopodobieństwo, iż dla pewnego ustalonego *n* wypłata odszkodowania za szkodę $n+2$-gą poprzedzi wypłatę odszkodowania za szkodę *n*-tą wynosi:

(A) $\frac{3}{8}$

(B) $\frac{1}{16}$

(C) $\frac{1}{4}$

(D) $\frac{3}{16}$

(E) $\frac{1}{8}$

Zadanie 7.
W klasycznym modelu procesu nadwyżki $U(t) = u + ct - S_{N(t)}$

- u jest nadwyżką początkową,
- ct jest sumą składek zgromadzonych do momentu t,
- $N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem intensywności λ,
- $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ jest sumą wypłat,
- proces $N(t)$ i pojedyncze wypłaty $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ są niezależne.

Niech A będzie zdarzeniem polegającym na tym, że do ruiny (stanu ujemnej nadwyżki) doszło już przy pierwszej szkodzie.
Niech B będzie zdarzeniem polegającym na tym, że do ruiny w ogóle w skończonym czasie doszło.
Załóżmy, że:

- wypłaty Y_i mają rozkład wykładniczy z wartością oczekiwaną $\mu = \dfrac{1}{\ln(12/11)}$,
- parametr intensywności składki c wynosi $c = 120\%\lambda\mu$,
- kapitał początkowy wynosi $u = 2\frac{2}{5}$

Prawdopodobieństwo warunkowe $\Pr(A|B)$ wynosi:

(A) $\dfrac{1}{2}$

(B) $\dfrac{11}{24}$

(C) $\dfrac{5}{12}$

(D) $\dfrac{11}{21}$

(E) $\dfrac{12}{22}$

Zadanie 8.

$N, Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ to niezależne zmienne losowe, N ma rozkład Poissona z wartością oczekiwaną równą 10, zaś $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ mają identyczny rozkład Pareto o dystrybuancie określonej na półosi dodatniej wzorem:

- $F(y) = 1 - \left(\frac{1}{1+y}\right)^2$

Niech $M = \max\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_N\}$, przy czym jeśli $N = 0$, to przyjmujemy $M = 0$.
Niech $m_{0.95}$ oznacza taką liczbę, że $\Pr(M \le m_{0.95}) = 0.95$
Liczba $m_{0.95}$ wynosi (z przybliżeniem do jednej dziesiątej):

(A) 4.8

(B) 6.8

(C) 8.8

(D) 10.9

(E) 13.0

Zadanie 9.

Pewien podmiot posiada wyjściowy majątek o wartości w, i narażony jest na stratę X. Strata X jest zmienną losową o złożonym rozkładzie Poissona:

$X = Y_1 + Y_2 + ... + Y_N$

- z oczekiwaną liczbą szkód równą $\mathrm{E}(N) = \lambda$, oraz:
- z wartością pojedynczej szkody o rozkładzie wykładniczym i wartości oczekiwanej równej jeden.

Rynek ubezpieczeniowy oferuje kontrakty z pokryciem nadwyżki każdej szkody ponad kwotę d, a więc pokrywa:

$X_d = (Y_1 - d)_+ + (Y_2 - d)_+ + ... + (Y_N - d)_+$

W zamian za składkę w wysokości: $(1+\theta)\mathrm{E}(X_d)$, gdzie parametr θ ma wartość mniejszą od 100%.

Podmiot ten postępuje racjonalnie, a w swoich decyzjach kieruje się maksymalizacją oczekiwanej użyteczności, przy czym jego funkcja użyteczności jest postaci:

$u(x) = -\exp(-\frac{1}{2}x)$.

Maksimum oczekiwanej użyteczności podmiot ten osiągnie wybierając kontrakt z udziałem własnym d w każdej szkodzie równym:

(A) $2\lambda \ln(1+\theta)$

(B) $\ln(1+\theta)$

(C) $2\ln(1+\theta)$

(D) $\frac{\ln(1+\theta)}{2}$

(E) $\frac{\lambda \ln(1+\theta)}{2}$

Zadanie 10.
Rozważamy klasyczny model procesu nadwyżki $U(t) = u + ct - S_{N(t)}$, gdzie:

- u to nadwyżka początkowa
- ct to suma składek zgromadzonych do momentu t,
- $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ to łączna wartość szkód zaszłych do momentu t,
- proces liczący $N(t)$ oraz wartości poszczególnych szkód $Y_1, Y_2, Y_3, ...$ są niezależne, przy czym:
- $N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem intensywności λ,
- wartości poszczególnych szkód $Y_1, Y_2, Y_3, ...$ mają ten sam rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej równej 1
- $c = (1+\theta)\cdot\lambda, \quad \theta > 0$

Wiadomo, że zmienna losowa:

- $L := \sup_{t>0}\{u - U(t)\}$

daje się przedstawić jako zmienna o rozkładzie złożonym:

- $L = l_1 + l_2 + ... + l_N$, $\quad$ ($L = 0$ gdy $N = 0$),

gdzie składnik l_1 jest zmienną określoną w przypadku, gdy nadwyżka spadnie poniżej u, i równy jest wtedy:

- $l_1 = u - U(t_1)$, gdzie t_1 jest tym momentem czasu, kiedy po raz pierwszy do takiego spadku doszło.

Warunkowa wartość oczekiwana liczby takich spadków, pod warunkiem że nastąpiła ruina:

$$\mathrm{E}(N | L > u)$$

dana jest wzorem:

(A) $\quad \frac{1+\theta}{\theta} + \frac{u}{1+\theta}$

(B) $\quad \frac{1}{\theta} + \frac{u\theta}{1+\theta}$

(C) $\quad \frac{1+\theta}{\theta} + \frac{u\theta}{1+\theta}$

(D) $\quad 1 + \frac{u}{1+\theta}$

(E) $\quad 1 + \frac{u\theta}{1+\theta}$

Egzamin dla Aktuariuszy z 12 marca 2012 r.

Matematyka ubezpieczeń majątkowych

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ ....

~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	A	
2	B	
3	D	
4	E	
5	C	
6	E	
7	B	
8	E	
9	C	
10	A	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.
♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.