Zadanie 1.
O niezależnych zmiennych losowych $N, M_1, M_2, M_3, \ldots$ wiemy, że:

- N ma rozkład dwumianowy z parametrami (n, q), gdzie n to liczba prób a $\mathrm{E}(N) = nq$
- $M_1, M_2, M_3, \ldots$ mają ten sam rozkład dwumianowy z parametrami $(1, Q)$ o wartości oczekiwanej równej $\mathrm{E}(M_1) = Q$.

Oczywiście parametry q oraz Q powyższych rozkładów są liczbami z przedziału $(0, 1)$, zaś n jest liczbą naturalną.
Zmienne losowe K oraz J to następujące dwie funkcje zmiennych N, M_1, M_2, M_3:

- $K = M_1 + M_2 + \ldots + M_N$, oraz:
- $J = N - K$.

Rozważmy ciąg $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ warunkowych wartości oczekiwanych $a_k = \mathrm{E}(J \mid K = k)$. Spośród poniższych stwierdzeń dotyczących tego ciągu wybierz stwierdzenie prawdziwe:

(A) jest to ciąg stały

(B) jest to ciąg rosnący

(C) jest to ciąg malejący

(D) jeśli tylko liczba n jest wystarczająco duża, wtedy istnieje liczba naturalna $n_0 < n$ taka, że dla $1 \le k \le n_0$ zachodzi $a_k \le a_{k-1}$ zaś dla $n_0 < k \le n$ zachodzi $a_k > a_{k-1}$

(E) jeśli tylko liczba n jest wystarczająco duża, wtedy istnieje liczba naturalna $n_0 < n$ taka, że dla $1 \le k \le n_0$ zachodzi $a_k \ge a_{k-1}$ zaś dla $n_0 < k \le n$ zachodzi $a_k < a_{k-1}$

Zadanie 2.
Łączna wartość szkód z pewnego portfela ryzyk to suma:

- $W = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_N$,

gdzie N ma rozkład Poissona, a zmienne $N, Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ spełniają założenia gwarantujące, iż zmienna W ma rozkład złożony Poissona.
Ubezpieczyciel pokrywa nadwyżkę każdej szkody ponad wartość 4, a więc łączna wartość wypłaconych przez niego odszkodowań wyniesie:

- $Z = (Y_1 - 4)_+ + (Y_2 - 4)_+ + \ldots + (Y_N - 4)_+$.

Jeśli wiadomo, że:

- $\mathrm{E}(N) = 100$,
- $\mathrm{E}(W) = 500$, $\quad \mathrm{var}(W) = 3600$,
- $\Pr(Y_1 \geq 0) = 1$, $\quad \Pr(Y_1 \leq 4) = \frac{1}{2}$, $\quad \mathrm{E}(Y_1 | Y_1 \leq 4) = 2$,

to zbiór możliwych wartości wariancji zmiennej Z równy jest przedziałowi:

(A) [600; 800]

(B) [800; 1000]

(C) [1000; 1200]

(D) [600; 1000]

(E) [800; 1200]

Zadanie 3.
Rozważamy dwie zmienne losowe o rozkładach złożonych, różniące się założeniami o rozkładzie liczby składników i rozkładzie pojedynczego składnika:

- $PG = Y_1 + \ldots + Y_N$, gdzie N ma rozkład Poissona o wartości oczekiwanej λ, zaś Y_1 ma rozkład geometryczny o funkcji prawdopodobieństwa danej wzorem $\Pr(Y_1 = k) = (1-q) \cdot q^k$ dla $k = 0,1,2,...$
- $GP = Y_1 + \ldots + Y_N$, gdzie Y_1 ma rozkład Poissona o wartości oczekiwanej λ, zaś N ma rozkład geometryczny o funkcji prawdopodobieństwa danej wzorem $\Pr(Y_1 = k) = (1-q) \cdot q^k$ dla $k = 0,1,2,...$

Jeśli rozważamy jedynie dopuszczalne wartości parametrów $\lambda > 0$ oraz $q \in (0, 1)$, to warunek konieczny i dostateczny, aby zachodziła nierówność:

$$\mathrm{var}(GP) > \mathrm{var}(PG)$$

można wyrazić w postaci:

(A) $\lambda > 1 + q$

(B) $\lambda > q$

(C) $\lambda > \frac{q}{p}$

(D) $\lambda > 2q$

(E) $\lambda > 2\frac{q}{p}$

Zadanie 4.
W pewnym jednorodnym portfelu ryzyk liczba szkód z pojedynczego ryzyka ma rozkład Poissona z nieznanym parametrem λ. Posiadamy informacje tylko o tych ryzykach z tego portfela, które w ostatnim roku wygenerowały co najmniej jedną szkodę. Ta informacja to:

- Liczba ryzyk, które wygenerowały co najmniej jedną szkodę wyniosła 200
- Liczba szkód z tych ryzyk wyniosła 320

Wybierz ten z poniżej podanych przedziałów, w którym mieści się wartość estymatora parametru λ uzyskanego metodą największej wiarygodności w oparciu o powyższe informacje.

(A) $(0; 1.05)$

(B) $(1.05; 1.10)$

(C) $(1.10; 1.15)$

(D) $(1.15; 1.20)$

(E) $(1.20; +\infty)$

Zadanie 5.
Łączna wartość szkód z pewnego ryzyka:

- $X = Y_1 + Y_2 + ... + Y_N$,

ma złożony rozkład geometryczny, z rozkładem liczby składników danym wzorem:

- $\Pr(N = k) = \frac{4}{5^{k+1}}$ dla $k = 0,1,2,...$, gdzie

oraz wykładniczym rozkładem wartości pojedynczej szkody o wartości oczekiwanej równej μ.
Odpowiedzialność ubezpieczyciela limitowana jest od góry, i w rezultacie łączna wartość wypłacanych odszkodowań X^* jest równa:

- $X^* := \min\{X, 5\mathrm{E}(Y_1)\}$.

Iloraz:
$$\frac{\mathrm{E}(X^*)}{\mathrm{E}(X)}.$$
wynosi z dobrym przybliżeniem:

(A) 0.993

(B) 0.988

(C) 0.983

(D) 0.978

(E) 0.973

Zadanie 6.
Szkoda losowo wybrana ze zbioru szkód zaszłych w miesiącu t pozostaje wciąż niezlikwidowana na koniec miesiąca $t+k$ z prawdopodobieństwem:

- 1 gdy $k=0$
- $(8/10)\cdot(3/4)^{k-1}$ gdy $k=1,2,3,\ldots$.

Reguła ta obowiązuje niezmiennie dla dowolnego całkowitego t.

Niech zdarzenie A polega na równoczesnym zajściu poniższych czterech warunków:

- liczba szkód zaistniałych i niezlikwidowanych na koniec miesiąca $t-2$ wynosi 288,
- Liczba szkód zaistniałych w ciągu miesiąca $t-2$ wynosi 80,
- Liczba szkód zaistniałych w miesiącu $t-1$ wynosi 75,
- Liczba szkód zaistniałych w miesiącu t wynosi 90.

Warunkowa oczekiwana liczba szkód zaistniałych i niezlikwidowanych na koniec miesiąca t, pod warunkiem zajścia zdarzenia A, wynosi:

(A) 306

(B) 315

(C) 333

(D) 348

(E) 360

Zadanie 7.
W klasycznym modelu procesu nadwyżki $U(t) = u + ct - S_{N(t)}$

- u jest nadwyżką początkową,
- ct jest sumą składek zgromadzonych do momentu t,
- $N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem intensywności λ,
- $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ jest sumą wypłat,
- proces $N(t)$ i pojedyncze wypłaty $Y_1, Y_2, Y_3, ...$ są niezależne.

Niech L oznacza maksymalną stratę, F_L jej dystrybuantę, zaś $\Psi(u)$ prawdopodobieństwo ruiny przy nadwyżce początkowej u. Wiadomo, że zachodzi:

$$F_L(u) = 1 - \Psi(u) = \Pr(\forall t \geq 0 \quad U(t) \geq 0).$$

Załóżmy, że wypłaty Y_i mają rozkład wykładniczy z wartością oczekiwaną μ, oraz iż parametr intensywności składki c wynosi $c = 110\%\lambda\mu$.

Wartość funkcji $\Psi(u)$ w punkcie $u = \mathrm{E}(L) + 1.645\sqrt{\mathrm{var}(L)}$ wynosi z dobrym przybliżeniem:

(A) 5.6%

(B) 6.0%

(C) 6.5%

(D) 7.1%

(E) 7.8%

Zadanie 8.
W pewnym ubezpieczeniu działa 5-klasowy system *No Claim Discount*. Składki roczne wynoszą:

- 220 zł w klasie 1
- 173 zł w klasie 2,
- 145 zł w klasie 3,
- 125 zł w klasie 4,
- 100 zł w klasie 5.

Przejście z klasy do klasy następuje corocznie, przy czym po roku bezszkodowym ubezpieczony z klasy 1 przechodzi do klasy 2, z klasy 2 do 3, z klasy 3 do 4, z klasy 4 do 5, a jeśli był w klasie 5, to dalej w niej pozostaje. Po roku ze szkodą (lub szkodami) ubezpieczony zawsze przechodzi do klasy 1.

Rozważmy ubezpieczonego, który generuje w kolejnych latach szkody zgodnie z procesem Poissona o częstotliwości $\lambda = (\ln 5 - \ln 4)$ rocznie. Załóżmy, że każdą szkodę zgłasza natychmiast po jej zajściu.

Wartość oczekiwana składki płaconej przez niego w n-tym roku ubezpieczenia dąży przy $n \to \infty$ do granicy równej:

(A) 128 zł

(B) 132 zł

(C) 136 zł

(D) 140 zł

(E) 144 zł

Zadanie 9.
Ubezpieczeni są losowo dobrani z populacji, w której:

- łączna wartość szkód dla ubezpieczonego charakteryzującego się wartością λ parametru Λ ma złożony rozkład Poissona z oczekiwaną liczbą szkód N równą λ,
- rozkład wartości pojedynczej szkody jest taki sam dla wszystkich ubezpieczonych, a jego wartość oczekiwana wynosi μ,
- parametr Λ ma rozkład Gamma (4,9) o wartości oczekiwanej 4/9 i wariancji 4/81.

Ubezpieczyciel sprzedaje członkom tej populacji ubezpieczenie w zamian za składkę początkową płatną z góry w wysokości:

- $P = (1+\theta) \cdot \mu \cdot \mathrm{E}(\Lambda | N > 0)$,

a po rozliczeniu roku tym ubezpieczonym, którzy nie zgłosili żadnej szkody, wypłaca bonus w wysokości:

- $B = (1+\theta) \cdot \mu \cdot \{\mathrm{E}(\Lambda | N > 0) - \mathrm{E}(\Lambda | N = 0)\}$.

Stosunek bonusu do składki początkowej B/P wynosi z dobrym przybliżeniem:

(A) 0.369

(B) 0.309

(C) 0.291

(D) 0.260

(E) 0.244

Zadanie 10.
Ubezpieczyciel prowadzi dwa portfele ubezpieczeń. W każdym z portfeli pojedyncze ryzyko generuje szkody zgodnie ze złożonym procesem Poissona z taką samą intensywnością λ. Portfele różnią się rozkładem wartości pojedynczej szkody i liczbą ryzyk w portfelu (n_1 i n_2 odpowiednio). Stosunkowy narzut na składkę netto dla ryzyk w obu portfelach jest ten sam i wynosi θ. W rezultacie parametry modelu są następujące:

- 1 portfel:

intensywność łączna $n_1\lambda$, rozkład wartości pojedynczej szkody o gęstości

$f(y) = 2\exp(-2y)$, składka za jedno ryzyko $(1+\theta)\frac{\lambda}{2}$;

- 2 portfel:

intensywność łączna $n_2\lambda$, rozkład wartości pojedynczej szkody o gęstości

$f(y) = 5\exp(-5y)$, składka za jedno ryzyko $(1+\theta)\frac{\lambda}{5}$.

Jeśli wiemy, że prawdopodobieństwo ruiny $\Psi(u)$ jako funkcja kapitału początkowego u jest postaci:

$$\Psi(u) = \frac{6}{10}\exp(-u) + \frac{1}{10}\exp(-3u),$$

to wartości parametrów modelu $\left(\theta,\ \frac{n_1}{n_1+n_2}\right)$ wynoszą:

(A) $\left(\frac{3}{7},\ \frac{1}{9}\right)$

(B) $\left(\frac{4}{7},\ \frac{3}{13}\right)$

(C) $\left(\frac{3}{7},\ \frac{1}{21}\right)$

(D) $\left(\frac{4}{7},\ \frac{1}{9}\right)$

(E) $\left(\frac{4}{7},\ \frac{1}{21}\right)$

Egzamin dla Aktuariuszy z 3 października 2011 r.

Matematyka ubezpieczeń majątkowych

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ ....K L U C Z   O D P O W I E D Z I..............................

~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	C	
2	B	
3	D	
4	A	
5	C	
6	B	
7	D	
8	E	
9	E	
10	A	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi.*
♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.