Zadanie 1.
O niezależnych zmiennych losowych N, M_1, M_2, M_3 wiemy, że:

- N ma rozkład Poissona z wartością oczekiwaną równą 100
- M_1, M_2, M_3 mają ten sam rozkład dwupunktowy o prawdopodobieństwach:
  $\Pr(M_1 = 1) = 0.9$, $\Pr(M_1 = 0) = 0.1$.

Zmienne losowe *K* oraz *J* to następujące dwie funkcje zmiennych N, M_1, M_2, M_3:

- $K = M_1 + M_2 + ... + M_N$, oraz:
- $J = N - K$.

Rozważmy ciąg $a_0, a_1, a_2, ...$ warunkowych wartości oczekiwanych $a_k = \mathrm{E}(J | K = k)$. Spośród poniższych stwierdzeń dotyczących tego ciągu wybierz stwierdzenie prawdziwe:

(A) jest to ciąg stały

(B) jest to ciąg rosnący

(C) jest to ciąg malejący

(D) istnieje taka liczba dodatnia *x*, że: $k < x \Rightarrow a_{k+1} > a_k$, oraz $k > x \Rightarrow a_{k+1} < a_k$

(E) istnieje taka liczba dodatnia *x*, że: $k < x \Rightarrow a_{k+1} < a_k$ oraz $k > x \Rightarrow a_{k+1} > a_k$

Zadanie 2.
Łączna wartość szkód z pewnego portfela ryzyk:
$W = Y_1 + Y_2 + ... + Y_N$, gdzie $Y_1, Y_2, Y_3, ...$ to wartości poszczególnych szkód,
ma złożony rozkład Poissona.
Ubezpieczyciel pokrywa nadwyżkę każdej szkody ponad wartość 2, a więc łączna wartość wypłaconych przez niego odszkodowań wyniesie:
$Z = (Y_1 - 2)_+ + (Y_2 - 2)_+ + ... + (Y_N - 2)_+$.
Jeśli wiadomo, że:
$\mathrm{E}(N) = 100$,
$\mathrm{E}(W) = 500$,
$\mathrm{var}(W) = 3200$,
$\mathrm{E}\left[(W - \mathrm{E}W)^3\right] = 30000$,
$\Pr(Y_1 \geq 2) = 1$,
to współczynnik skośności (stosunek momentu centralnego rzędu 3 do wariancji w potędze 3/2) zmiennej Z wynosi:

(A) 1/8

(B) 1/6

(C) 1/4

(D) 1/3

(E) 1/2

Zadanie 3.

Łączna wartość szkód $W = Y_1 + \ldots + Y_N$ w pewnym portfelu ryzyk ma rozkład złożony dwumianowy o parametrach (n, q, F), z wartością oczekiwaną liczby szkód równą $\mathrm{E}(N) = nq$. Przyjmujemy $n > 1$.

Rozkład wartości pojedynczej szkody jest dwupunktowy:

$$\Pr(Y_1 = 1) = \alpha, \qquad \Pr(Y_1 = 2) = 1 - \alpha, \qquad \alpha \in (0, 1)$$

Dla $q = 0.51$ można tak dobrać liczbę $\alpha \in (0, 1)$, że zmienna W będzie miała rozkład dwumianowy. Liczba ta znajduje się w przedziale:

(A) (0.75, 0.80)

(B) (0.80, 0.85)

(C) (0.85, 0.90)

(D) (0.90, 0.95)

(E) (0.95, 1.00)

Zadanie 4.
Niech:

- N oznacza liczbę roszczeń z jednego wypadku ubezpieczeniowego, zaś:
- $T_1, T_2, ..., T_N$ oznacza czas, jaki upływa od momentu zajścia wypadku do zgłoszenia roszczenia odpowiednio 1-go, 2-go,…, N-tego, przy czym numeracja roszczeń od 1-go do N-tego jest całkowicie przypadkowa (porządek liczb $T_1, T_2, ..., T_N$ jest losowy)

Założmy, że:

- zmienne losowe $N, T_1, T_2, T_3, ...$ są niezależne,
- zmienne losowe $T_1, T_2, T_3, ...$ mają identyczny rozkład wykładniczy o gęstości danej dla dodatnich t wzorem: $f(t) = \ln(3) \cdot 3^{-t}$, przy czym jednostką pomiaru czasu jest miesiąc
- zmienna losowa N ma rozkład ucięty Poissona o funkcji prawdopodobieństwa:

$$\Pr(N = k) = \frac{(\ln 2)^k}{k!}, \qquad k = 1,2,3,... .$$

Niech A oznacza zdarzenie, iż w ciągu pierwszego miesiąca od zajścia wypadku zgłoszono dokładnie jedno roszczenie, a więc iż dokładnie jedna liczba ze zbioru liczb $\{T_1, T_2, ..., T_N\}$, jest mniejsza lub równa 1.

Prawdopodobieństwo, że z tego wypadku pojawią się jeszcze następne roszczenia:

$$\Pr(N > 1 | A)$$

Z dobrym przybliżeniem wynosi:

(A) 0.307

(B) 0.281

(C) 0.256

(D) 0.234

(E) 0.206

Zadanie 5.
Łączna wartość szkód:

- $X = Y_1 + Y_2 + ... + Y_N$,

ma przy danej wartości λ parametru ryzyka Λ warunkowy rozkład złożony Poissona o oczekiwanej liczbie szkód równej λ oraz rozkładzie wartości pojedynczej szkody danym dla $y \geq 0$ gęstością:

- $f_{Y|\Lambda=\lambda}(y) = \frac{\lambda}{a+b\lambda}\exp\left(-\frac{\lambda}{a+b\lambda}y\right)$, gdzie $a \geq 0$, oraz $b > 0$.

Parametr ryzyka Λ ma w populacji ubezpieczonych rozkład dany dla $x \geq 0$ gęstością:

- $f_{\Lambda}(x) = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}\exp(-\beta x)$.

Przyjmijmy wartości parametrów zadania równe:

- $a = 1$, $b = 10$
- $\alpha = 3$, $\beta = 30$

Wobec tego różnica:

- $\mathrm{E}(N)\cdot\mathrm{E}(Y) - \mathrm{E}(X)$

wynosi:

(A) 0

(B) $\frac{1}{2}$

(C) $\frac{5}{6}$

(D) $\frac{9}{11}$

(E) 1

Zadanie 6.
Likwidacja szkody losowo wybranej spośród szkód zaszłych w miesiącu *t* następuje:
- z prawdopodobieństwem 1/10 jeszcze w ciągu tego samego miesiąca,
- z prawdopodobieństwem $(3/10)\cdot(2/3)^{k-1}$ w ciągu miesiąca $t+k$, $k=1,2,3,...$.

Reguła ta obowiązuje niezmiennie dla dowolnego całkowitego *t*.

Niech zdarzenie A polega na równoczesnym zajściu poniższych czterech warunków:
- liczba szkód zaistniałych i oczekujących na likwidację na koniec miesiąca $t-3$ wynosi 270,
- Liczba szkód zaistniałych w ciągu miesiąca $t-2$ wynosi 90,
- Liczba szkód zaistniałych w miesiącu $t-1$ wynosi 100,
- Liczba szkód zaistniałych w miesiącu t wynosi 110.

Warunkowa oczekiwana liczba szkód zaistniałych i niezlikwidowanych na koniec miesiąca t, pod warunkiem zajścia zdarzenia A, wynosi:

(A) 275

(B) 282

(C) 290

(D) 297

(E) 305

Zadanie 7.
Rozważamy proces dyskretny nadwyżki ubezpieczyciela postaci:

$$U_n = u + (c - du)n - \sum_{k=1}^{n} W_n , \qquad n = 0,1,2,3,..., \quad \text{gdzie:}$$

- $u \equiv U_0$ - to nadwyżka początkowa
- c - to kwota rocznej składki
- d – to stopa dywidendy wypłacanej corocznie akcjonariuszom od kapitału u
- $W_1, W_2, W_3,...$ - to niezależne zmienne o takim samym rozkładzie normalnym z parametrami μ_W i σ_W^2, wyrażające łączne wartości szkód w kolejnych latach

Wyznaczamy równocześnie składkę c oraz kapitał początkowy u w taki sposób, aby składka była jak najniższa, przy warunku, iż prawdopodobieństwo ruiny, a więc zdarzenia, iż:

- dla pewnego $n \in \{0,1,2,3,...\}$ zajdzie $U_n < 0$

równe jest z góry zadanej liczbie ψ.

W obliczeniach posługujemy się wzorem przybliżonym na prawdopodobieństwo ruiny opartym na aproksymacji procesu U_n ciągłym procesem Wienera o wartościach oczekiwanych i wariancjach rocznych przyrostów takich jak w procesie U_n.

Przy założeniach liczbowych:
$\psi = \exp(-3)$, $\mu_W = 1000$, $\sigma_W^2 = 10000$, $d = 6\%$,
najniższa wartość składki c spełniająca ww. warunki znajduje się w przedziale:

(A) $(1025, 1034)$

(B) $(1034, 1044)$

(C) $(1044, 1055)$

(D) $(1055, 1067)$

(E) $(1067, 1080)$

Zadanie 8.
Rozważmy parę zmiennych losowych T i D, oznaczających odpowiednio:

- T – moment czasu, w którym zaszła szkoda,
- D – czas, jaki upływa od momentu zajścia szkody do jej likwidacji.

Jednostką pomiaru czasu jest jeden rok.
Załóżmy, że T oraz D są niezależne, przy czym:

- T ma rozkład jednostajny na odcinku $(0, 2)$
- D ma rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej równej jeden.

Sumę $(T + D)$ interpretujemy jako moment czasu, w którym zlikwidowano szkodę.

Warunkową wartość oczekiwaną $\mathrm{E}(D | T + D > 2)$ interpretujemy jako oczekiwany odstęp w czasie pomiędzy momentem zajścia a momentem likwidacji szkody, pod warunkiem iż szkoda, do której doszło na odcinku czasu $(0, 2)$, do końca tego odcinka czasu zachowała status szkody niezlikwidowanej.

$\mathrm{E}(D | T + D > 2)$ znajduje się w przedziale:

(A) $(0.0, \quad 1.6)$

(B) $(1.6, \quad 1.65)$

(C) $(1.65, \quad 1.7)$

(D) $(1.7, \quad 1.75)$

(E) $(1.75, \quad \infty)$

Zadanie 9.
Rozważamy klasyczny proces nadwyżki ubezpieczyciela:
$U(t) = u + c \cdot t - S(t)$
gdzie:
- u – to nadwyżka początkowa,
- $S(t)$ - to skumulowana wartość szkód tworząca złożony proces Poissona z intensywnością λ, z wykładniczymi szkodami o wartości oczekiwanej $1/\beta$
- Parametr intensywności składki wynosi $c = \frac{4\lambda}{3\beta}$

Wiemy, że przy aktualnej wysokości kapitału początkowego *u* spełniony jest warunek:
- $\Psi(u) = 1/4$.

Niech zdarzenie *A* oznacza, iż do ruiny doszło, a więc dla pewnego $t > 0$ zaszedł warunek $U(t) < 0$.
Niech zdarzenie *B* oznacza, iż do ruiny doszło w tym momencie, w którym po raz pierwszy nadwyżka $U(t)$ spadła poniżej wartości kapitału początkowego *u*.
Prawdopodobieństwo warunkowe $\Pr(B|A)$ mieści się w przedziale:

(A) (0.00, 0.01)

(B) (0.01, 0.02)

(C) (0.02, 0.03)

(D) (0.03, 0.04)

(E) (0.04, 1.00)

Zadanie 10.
Rozkład zmiennej losowej X ma dwie ekwiwalentne reprezentacje:

- jako rozkład złożony geometryczny, z liczbą składników N o rozkładzie:

  $$\Pr(N = k) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^k, \qquad k = 0,1,2,...,$$

  oraz wartością pojedynczego składnika o rozkładzie wykładniczym z wartością oczekiwaną równą 1/2
- jako rozkład złożony dwumianowy, gdzie liczba składników N może wynieść tylko zero lub jeden, zaś wartość składnika (o ile $N = 1$) ma rozkład:

(A) wykładniczy o wartości oczekiwanej 2

(B) wykładniczy o wartości oczekiwanej 3

(C) Gamma o parametrach (3,1)

(D) Gamma o parametrach $(3, 3/2)$

(E) Gamma o parametrach $(2, 2/3)$

Egzamin dla Aktuariuszy z 20 czerwca 2011 r.

Matematyka ubezpieczeń majątkowych

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ ....K L U C Z O D P O W I E D Z I............................

~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	A	
2	C	
3	B	
4	E	
5	B	
6	A	
7	D	
8	C	
9	D	
10	A	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.