Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

LXIX Egzamin dla Aktuariuszy z 8 grudnia 2014 r.

Część I

Matematyka finansowa

WERSJA TESTU A

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej:

....

Czas egzaminu: 100 minut

1. Rozważmy rynek, na którym jednoroczna stopa spot wynosi 9%, natomiast dwuletnia stopa spot wynosi 10.05%. Na rynku tym dwuletnia, stałokuponowa obligacja sprzedawana jest *at par*. Firmy A oraz B zainteresowane są uzyskaniem z banku dwuletniego kredytu na kwotę K każda, przy czym firma A chciałaby uzyskać kredyt o zmiennym oprocentowaniu, a firma B – o oprocentowaniu stałym. Bank zaoferował pożyczki o następujących warunkach (stopy roczne):

	Firma A	Firma B
Stałe	11.5%	13.5%
Zmienne	LIBOR + 2.25%	LIBOR + 3.25%

Firmy stwierdziły, że najkorzystniejsze dla nich będzie, gdy:

- firma A weźmie kredyt o stałym oprocentowaniu,
- firma B weźmie kredyt o zmiennym oprocentowaniu,
- firmy A i B zawrą kontrakt *swap*, na mocy, którego:
  - firma A płaci firmie B oprocentowanie zmienne LIBOR + c,
  - firma B płaci firmie A oprocentowanie stałe 11%.

Ile wynosić powinna wartość c, aby żadna z firm nie straciła na kontrakcie, przy założeniu, że:

- alternatywnie dla kontraktu *swap* obie firmy mogą emitować i kupować obligacje – zarówno stałokuponowe jak i zmiennokuponowe (w oparciu o stopę LIBOR)
- na rynku brak kosztów transakcyjnych związanych z pożyczką, zawarciem transakcji *swap*, bądź emisją lub kupnem obligacji?

Proszę podać najbliższą odpowiedź.

A) 0.2%
B) 0.4%
C) 0.6%
D) 0.8%
E) 1.0%

2. Rozważmy dwóch inwestorów (A oraz B), z których każdy, dysponując kwotą 1, chce zorganizować koncert plenerowy. Koszt organizacji każdego z koncertów wynosi a.
W przypadku ładnej pogody kwota uzyskiwana z koncertu przez organizatora to $3a$, zaś w przypadku brzydkiej pogody – kwota wynosi 0. W celu zabezpieczenia się przed ryzykiem wystąpienia brzydkiej pogody istnieje możliwość wykupienia ubezpieczenia. Za składkę u ubezpieczyciel wypłaca kwotę $2u$ w przypadku brzydkiej pogody. W przypadku ładnej pogody wypłata wynosi 0. Prawdopodobieństwo ładnej pogody wynosi 50%.
Inwestor A inwestuje $1-u$ w organizację koncertu, a kwotę u w ubezpieczenie ($u \in [0;1]$).
Inwestor B inwestuje kwotę 1 w organizację koncertu. Inwestor ten pożycza również z banku kwotę u ($u \in [0;3]$) i kwotę tę inwestuje w ubezpieczenie. Warunki pożyczki zakładają, że zwrot pożyczki następuje w dniu koncertu, w kwocie $1.1u$.
Inwestując swoje środki obaj inwestorzy chcą zmaksymalizować stopę zwrotu z inwestycji przy najmniejszym możliwym poziomie ryzyka (mierzonym wariancją stopy zwrotu z inwestycji).
Oznaczając przez r_A oczekiwaną stopę zwrotu z inwestycji dla inwestora A oraz przez r_B oczekiwaną stopę zwrotu z inwestycji dla inwestora B, proszę wyznaczyć $r_A - r_B$ (proszę podać najbliższą wartość):

A) 5%
B) 0%
C) -5%
D) -10%
E) -15%

3. Inwestor w chwili $t = 0$ może zainwestować całe swoje środki w instrument finansowy I_1 lub też wpłacić je na lokatę dwuletnią. W przypadku wpłacenia środków na lokatę stopa zwrotu zarówno w pierwszym jak i drugim roku wynosi $r = 5\%$. Inwestor nie ma możliwości wypłacenia środków z lokaty do końca inwestycji w chwili $t = 2$.

W przypadku inwestycji w instrument I_1 stopa zwrotu w okresie roku jest realizacją zmiennej losowej X_1. W chwili $t = 1$ środki są wypłacane i natychmiast reinwestowane – w instrument finansowy I_2 lub na rocznej lokacie o stopie zwrotu r. W przypadku inwestycji w instrument I_2 stopa zwrotu w okresie roku jest realizacją zmiennej losowej X_2.

Inwestycja w lokatę nie wiąże się z żadnymi kosztami transakcyjnymi, podczas gdy w przypadku inwestycji w instrument I_1 oraz I_2 w momencie inwestycji pobierana jest opłata w wysokości 0.5% inwestowanych środków.

Wektor (X_1, X_2) ma rozkład ciągły z gęstością:

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 156.25 & gdy\ x_1 \in [0; 8\%], x_2 \in [0; 2x_1] \\ 0 & w\ przeciwnym\ przypadku \end{cases}.$$

O wysokości X_1 inwestor dowiaduje się w chwili $t = 1$ (przed chwilą reinwestycji), o wysokości X_2w chwili $t = 2$ (moment końca inwestycji).

Inwestor zastosuje strategię inwestycyjną mającą zmaksymalizować oczekiwaną dwuletnią stopę zwrotu. Zakładając stosowanie strategii optymalnej inwestor w chwili $t = 0$ szacuje, że oczekiwana dwuletnia stopa zwrotu jest najbliższa wartości:

A) 10.25%
B) 10.51%
C) 10.77%
D) 11.03%
E) 11.29%

4. Spółka z branży naftowej emituje 2-letnią obligację zerokuponową, która w momencie zapadalności wypłaci 1000 USD. Obligacja ta w momencie emisji jest wyceniana przez rynek na 900 USD. W tym samym momencie spółka emituje analogiczną obligację zerokuponową, która dodatkowo wypłaci w momencie zapadalności premię zależną od kursu baryłki ropy. Premia ta jest pomnożoną przez 100 nadwyżką kursu baryłki ropy w momencie zapadalności obligacji ponad 80 USD, przy czym nadwyżka kursu ograniczona jest do 20 USD (tzn. premia nie może przekroczyć 2000 USD). Inwestor posiada następujące kwotowania wygasających za dwa lata europejskich opcji na baryłkę ropy:

Typ opcji:	**Cena wykonania USD**	**Cena opcji USD**
Kupna	80.00	13.10
Kupna	100.00	7.50
Sprzedaży	80.00	12.65
Sprzedaży	100.00	24.44

Jaką, co najwyżej, cenę jest skłonny zapłacić inwestor za obligację z premią? Proszę podać najbliższą odpowiedź.

A) 945.00 USD
B) 1 415.00 USD
C) 1 460.00 USD
D) 2 079.00 USD
E) 2 960.00 USD

5. Rozważmy n-letnią obligację o nominale 1000 PLN płacącą roczne kupony w wysokości 5% nominału. Niech $d(n)$ oznacza *duration* rozważanej obligacji wyznaczone w oparciu o roczną stopę wolną od ryzyka wynoszącą 4%. Wówczas, $\lim_{n \to +\infty} d(n)$ wynosi (proszę podać najbliższą odpowiedź):

A) 20
B) 21
C) 25
D) 26
E) $+\infty$

6. Rozważmy portfel zbudowany z długich pozycji w wygasających za rok europejskich opcjach kupna i europejskich opcjach sprzedaży wystawionych na niepłacącą dywidendy akcję spółki S, z ceną wykonania 60 dla obydwu rodzajów tych opcji. W chwili obecnej cena opcji kupna wynosi 4, a opcji sprzedaży 8. Załóżmy, że cena akcji spółki S za rok ma rozkład jednostajny na przedziale $[20,80]$. Przy jakim udziale opcji kupna (mierzonym wartością środków zainwestowanych w opcje kupna) portfel ten ma najmniejszą wariancję rocznej stopy zwrotu? Proszę podać najbliższą odpowiedź.

A) 35%
B) 40%
C) 45%
D) 50%
E) 55%

7. Kredyt o wartości K jest spłacany przez okres 40 lat równymi ratami płatnymi na końcu każdego roku. Oprocentowanie kredytu wynosi 5%. Bezpośrednio po zapłaceniu 15 raty kredytobiorca wystąpił do banku o zmianę sposobu dalszego spłacania kredytu. Ustalone zostało, że:

- pozostałe zadłużenie zostanie spłacone przez następne 20 lat równymi ratami, płatnymi na końcu każdego roku,
- oprocentowanie zostaje zmienione i wynosi 6.5%.

Wiedząc, że różnica pomiędzy sumą odsetek zapłaconych na końcu 17, 19, 21, …,35 roku przy nowych warunkach spłaty jest o 14 038.80 większa niż suma odsetek, jaka byłby zapłacona w pierwotnej formule spłaty kredytu, w tym samym czasie, obliczyć wartość K. Proszę podać najbliższą wartość.

A) 420 000
B) 430 000
C) 440 000
D) 450 000
E) 460 000

8. Rozważmy 12 letnią inwestycję, w ramach której ulokowana została kwota 1 000 000 na bankowym koncie inwestycyjnym gwarantującym stałe oprocentowanie roczne. Na końcu każdego roku z konta wypłacane są wszystkie należne odsetki, po czym niezwłocznie lokowane są w 3 funduszach inwestycyjnych A_1, A_2 i A_3, których stopy zwrotu są stałe i wynoszą odpowiednio: 4.5%, 5.0%, 5.5%.

Wiadomo, że alokacja środków do poszczególnych funduszy na końcu roku $k = 1,2, \dots ,12$ jest następująca:

- A_1 – 30% środków,
- $A_2 - \frac{13-k}{13}$ pozostałych środków.

Po upływie 12 lat wszystkie należne środki wycofano i inwestycja została zakończona. Obliczyć, jakie było oprocentowanie bankowego konta inwestycyjnego, wiedząc, że efektywna roczna stopa zwrotu z zainwestowanego kapitału w tej inwestycji wyniosła 4.35%. Proszę podać najbliższą wartość.

A) 3.9%
B) 4.0%
C) 4.1%
D) 4.2%
E) 4.3%

9. Kredyt jest spłacany w 30 ratach płatnych na końcu kolejnych lat, przy stopie oprocentowania równej i, której odpowiada czynnik dyskontujący v. Raty mają postać następującą:

$$R, R-X, R-2X, \dots, R-18X, R-19X, R-18X, R-17X, R-16X, \dots, R-9X.$$

Wiadomo, że stosunek R/X wynosi r. Proszę wskazać wzór wyrażający udział odsetek w 15 racie.

A) $\dfrac{14 + r\cdot(v^{16}-1) + a_{\overline{10|}} + v^{6}\cdot(a_{\overline{6|}} - 2) - 8\cdot v^{16}}{14-r}$

B) $\dfrac{14 - r\cdot(v^{16}-1) + a_{\overline{6|}} - v^{6}\cdot(a_{\overline{10|}} + 2) + 8\cdot v^{16}}{14-r}$

C) $\dfrac{14 - r\cdot(v^{16}-1) + a_{\overline{10|}} + v^{6}\cdot(a_{\overline{6|}} - 2) - 8\cdot v^{16}}{14-r}$

D) $\dfrac{14 + r\cdot(v^{16}-1) + a_{\overline{6|}} - v^{6}\cdot(a_{\overline{10|}} + 2) - 8\cdot v^{16}}{14-r}$

E) $\dfrac{14 + r\cdot(v^{16}-1) + a_{\overline{10|}} + v^{6}\cdot(a_{\overline{6|}} + 2) + 8\cdot v^{16}}{14-r}$

10. Renta wieczysta wypłaca raty następująco:

- na początku pierwszego roku wypłata wynosi 3,
- potem wypłaty są dokonywane na końcu każdego parzystego roku, a wielkość raty wypłacanej na końcu roku $2n$, gdzie $n = 1, 2, \ldots$, wynosi $\dfrac{5^n \cdot (2 \cdot n + 3)}{4^n}$.

Stopa oprocentowania jest równa 13%. Niech A oznacza zdyskontowaną wartość tej renty na początku pierwszego roku, natomiast M niech będzie maksymalną wartością zdyskontowanej raty. Proszę obliczyć ile wynosi iloraz A/M (proszę podać najbliższą wartość).

A) 125
B) 128
C) 131
D) 134
E) 137

Dystrybuanta rozkładu normalnego N(0,1)

z	**0.00**	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
3.6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
3.7	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992
3.8	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995
3.9	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997

Egzamin dla Aktuariuszy z 8 grudnia 2014 r.

Matematyka finansowa

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko: ....

Pesel: ....

OZNACZENIE WERSJI TESTU ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	E	
2	E	
3	C	
4	C	
5	D	
6	E	
7	E	
8	D	
9	D	
10	B	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.
♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.