

Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy
LXI Egzamin dla Aktuariuszy z 1 października 2012 r.

Część I

Matematyka finansowa

WERSJA TESTU A

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej:

.....

Czas egzaminu: 100 minut

1. Rozważmy model z czasem ciągłym oraz dwoma procesami opisującymi ceny akcji $\{S_j(t)\}_{t \geq 0}; j = 1, 2$

Każda z akcji płaci dywidendę ze stałą intensywnością proporcjonalną do bieżącej ceny akcji; tj. dla $t \geq 0$ akcja $S_j(t)$ płaci kwotę dywidendy $\delta_j \cdot S_j(t) \cdot dt$ w okresie czasu między t a $(t + dt)$.

Rozważmy zobowiązanie zakładu ubezpieczeń zapadające w chwili $t = 3$ o wypłacie na moment zapadalności postaci $Max\{S_1(3), S_2(3)\}$.

Ponadto wiadomo, że:

- i. $S_1(0) = PLN 100$;
- ii. $S_2(0) = PLN 200$;
- iii. akcja $S_1(t)$ płaci dywidendę w kwocie $0.05 \cdot S_1(t) \cdot dt$ w okresie czasu między t a $(t + dt)$;
- iv. akcja $S_2(t)$ płaci dywidendę w kwocie $\delta_2 \cdot S_2(t) \cdot dt$ w okresie czasu między t a $(t + dt)$;
- v. dostępna jest europejska opcja wymiany (*exchange option*) dająca możliwość zamiany akcji $S_2(t)$ na akcję $S_1(t)$, zapadająca w chwili $t = 3$; cena tej opcji na chwilę obecną ($t = 0$) wynosi $PLN 10$;
- vi. obecna ($t = 0$) wartość zobowiązania zakładu ubezpieczeń zapadającego w chwili $t = 3$ wynosi $PLN 190$.

Jaka jest wartość δ_2 ? Podaj najbliższą wartość:

- A) 0.025
- B) 0.030
- C) 0.035
- D) 0.040
- E) 0.045

Wskazówka:

Opcja wymiany (*exchange option*) daje jej posiadaczowi, w terminie wygaśnięcia opcji, możliwość (prawo) wymiany jednego instrumentu podstawowego na drugi.

2. Zakład ubezpieczeń na życie wyznacza kapitałowy wymóg wypłacalności dla ryzyka stopy procentowej (SCR_{INT}) w oparciu o wartość Zmiany Aktywów Netto pod wpływem wahań stopy procentowej według wzoru:

$$SCR_{INT} = \max(\Delta NAV_{UP}, \Delta NAV_{DOWN}, 0)$$

gdzie:

ΔNAV_{UP} - Zmiana Aktywów Netto pod wpływem wzrostu stopy procentowej,

ΔNAV_{DOWN} - Zmiana Aktywów Netto pod wpływem spadku stopy procentowej.

Aktywa Netto są wyznaczane jako nadwyżka aktywów ponad zobowiązania ubezpieczeniowe.

Przyjęto następującą konwencję wyznaczania Zmiany Aktywów Netto: dodatnia wartość oznacza stratę (gdzie strata oznacza spadek wartości Aktywów Netto).

Portfel aktywów zakładu ubezpieczeń składa się z trzech pakietów obligacji wygasających odpowiednio po 4, 8 i 14 latach. Każdy z pakietów ma łączny nominal równy 150 mln PLN i każdy płaci łącznie roczny kupon 8% na koniec każdego roku.

Portfel zobowiązań ubezpieczeniowych zakładu posiada wbudowane opcje i gwarancje, w wyniku czego nominalne przepływy pieniężne zobowiązań zależą od wahań stopy procentowej. Znane są następujące charakterystyki portfela zobowiązań:

- obecna wartość: 300 mln PLN
- efektywny czas trwania (*effective duration*): 6.5
- efektywna wypukłość (*effective convexity*): 5.7

Roczna stopa procentowa jest założona na stałym poziomie 4% (kapitalizacja dyskretna).

Wahania stopy procentowej w górę/dół są założone +/- 1.5 p.p.

Kapitałowy wymóg wypłacalności na ryzyko stopy procentowej wynosi (mln PLN):

- A) 23.64
- B) 29.06
- C) 29.44
- D) 31.64
- E) 52.69

3. Obecna ($t = 0$) cena akcji Z wynosi $PLN 40$, parametr zmienności ceny akcji $\sigma = 0.23$. Rozpatrujemy model ciągły, w którym wolna od ryzyka stopa procentowa ma stałą roczną intensywność oprocentowania równą 0.07 . Ponadto wiadomo, że akcja Z płaci dywidendę ze stałą roczną intensywnością $\delta = 0.03$. Dostępna jest europejska opcja kupna wystawiona na akcję Z o cenie wykonania $PLN 45$ i momencie wygaśnięcia za 6 miesięcy, której obecna ($t = 0$) cena wynosi 1.091 oraz parametry $N(d_1) = 0.3015$ i $\Gamma = 0.0528$.

Podaj najbliższe oszacowanie ceny opcji kupna wystawionej na akcję Z wiedząc, że cena akcji Z wzrosła w bardzo krótkim okresie czasu do wartości $PLN 41$.

- A) 1.362
- B) 1.388
- C) 1.397
- D) 1.414
- E) 1.423

Wskazówka:

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S_t}{X} + \left(r - \delta + \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot (T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}}$$
, gdzie S_t - cena akcji w chwili t ; X -cena wykonania; σ - zmienność ceny akcji; r - stopa wolna od ryzyka; T - moment wykonania opcji.

$N(\cdot)$ oznacza dystrybuantę standardowego rozkładu normalnego.

4. Rozważmy obligację korporacyjną wyemitowaną na początku roku przez spółkę o ratingu kredytowym A. Jest to trzyletnia obligacja o nominale 1 000, z kuponem w wysokości 4% wartości nominalnej, płatnym na koniec roku.

Do wyceny obligacji korporacyjnych wykorzystujemy model oparty o rating kredytowy emitenta i posiadający następujące założenia:

- Możliwe są trzy ratingi kredytowe A, B lub C.
- Macierz prawdopodobieństw przejścia pomiędzy ratingami w jednym kroku ma następującą postać:

$$\begin{bmatrix} p_{AA} & p_{AB} & p_{AC} \\ p_{BA} & p_{BB} & p_{BC} \\ p_{CA} & p_{CB} & p_{CC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{bmatrix}.$$

- Krok modelu jest roczny.
- Jeśli na początku roku k emitent obligacji posiada rating kredytowy A, B lub C, to do dyskontowania przepływów pieniężnych z wyemitowanej przez niego obligacji przypadających na dany rok używamy odpowiednio czynnika dyskontującego v_A, v_B lub v_C . Czynniki te wynoszą: $v_A = 0.95, v_B = 0.90, v_C = 0.85$.

Przy powyższych założeniach, cena obligacji w momencie emisji wynosi w przybliżeniu:

- A) 701.59
- B) 756.00
- C) 920.48
- D) 965.77
- E) 1000.00

5. Funkcja intensywności oprocentowania rachunku w chwili t , dla kwoty zainwestowanej w chwili s $0 \leq s \leq t$ wynosi: $\delta(s, t) = (1 + s + 2t)^{-1}$. Rozważmy dwie strategie inwestycyjne w horyzoncie czasu $[0, 2]$:

- 1) Kwotę $K(0)$ inwestujemy w chwili 0 i utrzymujemy do chwili 2.
- 2) Kwotę $K(0)$ inwestujemy w chwili 0, w chwili 1 wypłacamy zakumulowaną wartość tej kwoty i natychmiast reinwestujemy na tym samym rachunku (zgodnie z podaną intensywnością oprocentowania).

Niech $K_1(2), K_2(2)$ oznaczają zakumulowane na rachunku na koniec inwestycji kwoty dla strategii 1) i 2) odpowiednio. Stosunek tych kwot, tzn. $K_1(2)/K_2(2)$ wynosi w przybliżeniu:

- A) 0.5
- B) 0.75
- C) 0.9
- D) 1
- E) 1.05

6. Cena jednej akcji spółki α wynosi 50. Inwestor zakłada, że cena akcji tej spółki za rok ma rozkład jednostajny na przedziale $(20, 100)$. Inwestor konstruuje dwa portfele:

- 1) Zawierający w 100% akcje spółki α .
- 2) Zawierający w 100% długie pozycje w europejskich opcjach call na akcje spółki α z ceną wykonania 50 i rocznym terminem wykonania.

Cena opcji wynosi 10.

Przy powyższych założeniach, obliczyć stosunek wariancji rocznej stopy zwrotu z portfela 2, do wariancji rocznej stopy zwrotu z portfela 1. Podać najbliższą wartość:

- A) 11.55
- B) 12.97
- C) 13.06
- D) 13.51
- E) 13.94

7. Rozważmy dwie renty A i B, o następujących charakterystykach:

renta A

- renta o płatnościach dokonywanych na końcu każdego roku przez okres 20 lat,
- pierwsza płatność wynosi 5 000, a każda kolejna płatność jest mniejsza od płatności poprzedniej o Q ,
- jeżeli zmodyfikujemy rentę A w ten sposób, że pierwsza płatność wynosi 5 000, a każda kolejna płatność jest większa od płatności poprzedniej o Q , to stosunek wartości obecnej renty A do wartości obecnej zmodyfikowanej renty A wyniesie 0.727027

renta B

- renta ciągła o okresie wypłat 20 lat,
- intensywność wypłat w chwili t wynosi $f(t) = C \cdot t^2$,
- wartość obecna renty B jest taka sama jak renty A.

W przypadku obu rent intensywność oprocentowania jest stała i wynosi 0.04879.

Obliczyć, ile wynosiłaby obecna wartość renty B, gdyby zmodyfikować jej intensywność wypłat w sposób następujący: $f_1(t) = t^2 + C \cdot t$

Podaj najbliższą wartość.

- A) 5 612
- B) 5 622
- C) 5 632
- D) 5 642
- E) 5 652

8. Analiza danych dotyczących portfela grupowych ubezpieczeń na życie w okresie 20 kolejnych lat wykazała, że w tym okresie:
- w pierwszym roku była wpłacona składka o wartości P , natomiast w każdym następnym roku składka rosła o 1%,
 - wyniki techniczne uzyskiwane przez zakład ubezpieczeń w tym portfelu wynosiły:
 $0.9 \cdot (P - 1\,500)$ w pierwszym roku powyższego okresu,
 $0.03 \cdot [P \cdot (n - 1) - 200]$ dla roku n , w latach 2, 3, ..., 10
 $0.02 \cdot [P \cdot (n - 1) - 100]$ dla roku n , w latach 11, 12, ..., 20
 - marża zakładu ubezpieczeń ze sprzedaży ubezpieczeń w ramach przedmiotowego portfela rozumiana jako stosunek sumy zdyskontowanych na początek okresu wyników technicznych do sumy zdyskontowanych składek wyniosła 7%,
 - składka była opłacana na początku każdego roku, a wyniki techniczne za dany rok ustalano na końcu tego roku.

Oblicz wartość P , przy założeniu, że w całym powyższym okresie stopa oprocentowania była stała i wynosiła 5%.

Podaj najbliższą wartość.

- A) 601
- B) 621
- C) 641
- D) 661
- E) 681

9. Kredyt jest wypłacany przez bank w 3 transzach, płatnych na początku roku w odstępach rocznych. Wysokość pierwszej transzy wynosi 200 000, a stosunek wartości każdej kolejnej transzy do poprzedniej jest stały i wynosi S .
- Każda transza kredytu spłacana jest począwszy od momentu jej otrzymania, w postaci 10 letniej renty o równych płatnościach dokonywanych na końcu kolejnych lat.
- Wyznacz wartość S , jeżeli wiadomo, że sumaryczna kwota odsetek zapłaconych w ratach płatnych na końcu 7, 8, 9 i 10 roku (lata są liczone od momentu wypłaty pierwszej transzy kredytu) wynosi 49 700, a stopa procentowa jest równa 8%.

Podaj najbliższą wartość.

- A) 0.45
- B) 0.50
- C) 0.55
- D) 0.60
- E) 0.65

10. Renta wieczysta wypłaca raty na końcu każdego parzystego roku. Wielkość raty wypłacanej na końcu roku $2n$, gdzie $n = 1, 2, \dots$, wynosi:

$$\frac{n \cdot (2n + 1)}{6^n}$$

Wskaż wzór wyrażający skapitalizowaną wartość tej renty na początku pierwszego roku, jeżeli czynnik dyskontowy jest równy v .

A) $\frac{36v^4 + 108v^2}{216 + 18v^4 - 108v^2 - v^6}$

B) $\frac{36v^4 + 6v^2}{216 + 18v^4 + 108v^2 + v^6}$

C) $\frac{6v^4 + 36v^2}{216 + 18v^4 - 108v^2 - v^6}$

D) $\frac{36v^4 + 108v^2}{216 + 18v^4 + 108v^2 + v^6}$

E) $\frac{6v^4 + 108v^2}{216 + 18v^4 - 108v^2 - v^6}$

Egzamin dla Aktuariuszy z 1 października 2012 r.**Matematyka finansowa****Arkusz odpowiedzi***

Imię i nazwisko:

Pesel:

OZNACZENIE WERSJI TESTU

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja [♦]
1	C	
2	A	
3	D	
4	C	
5	E	
6	B	
7	A	
8	B	
9	D	
10	E	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.