Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

LX Egzamin dla Aktuariuszy z 28 maja 2012 r.

Część I

Matematyka finansowa

WERSJA TESTU A

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej:

....

Czas egzaminu: 100 minut

1. Kredyt hipoteczny o wartości 400 000 będzie spłacany przez 30 lat ratami płatnymi na końcu każdego roku, w następujący sposób:

- przez pierwsze 10 lat kredyt spłacany jest równymi ratami o wartości R,
- w drugim dziesięcioleciu raty tworzą ciąg malejący R, R-1000, R-2000, ..., R-9000,
- w trzecim dziesięcioleciu kredyt znowu spłacany jest ratami o stałej wartości,
- oprocentowanie kredytu w pierwszym dziesięcioleciu wynosi 9%, w drugim 8%, a w trzecim 7%.

Wiedząc, że wartość kapitału spłaconego w 17 i 27 racie wynosi w sumie 35 774.12 oblicz sumaryczną kwotę odsetek zapłaconych w drugim dziesięcioleciu.

Podaj najbliższą wartość.

A) 224 160
B) 224 360
C) 224 560
D) 224 760
E) 224 960

2. Kredyt zostanie wypłacony kredytobiorcy w 10 transzach płatnych na początku każdego roku, w odstępach rocznych. Wysokość pierwszej transzy wyniesie 50 000, a każda kolejna transza będzie większa od poprzedniej o stałą wartość D.

Każda transza kredytu spłacana jest w postaci 5-letniej renty o jednakowych płatnościach na końcu kolejnych lat, przy czym pierwsza rata spłaty zostaje wpłacona rok po otrzymaniu danej transzy kredytu.

Wiadomo, że stosunek sumy odsetek zapłaconych przez kredytobiorcę na końcu 8 roku – licząc od momentu otrzymania pierwszej transzy kredytu – do sumy spłat kapitału zapłaconych w tym terminie wynosi 0.26523.

Wyznacz wartość D, przy założeniu, że stopa procentowa jest równa 8%.

Podaj najbliższą wartość.

A) 4 600

B) 4 700

C) 4 800

D) 4 900

E) 5 000

3. Renta wieczysta wypłaca na końcu roku n kwotę ${2^{n+1}}/{(2n+1)}$, gdzie n = 1, 2, 3, … Oblicz obecną wartość tej renty, przy założeniu, że czynnik dyskontujący v jest równy 0.49. Podaj najbliższą wartość.

A) 3.3417
B) 3.3418
C) 3.3419
D) 3.3420
E) 3.3421

4. Kredyt spłacany jest za pomocą *3n* rat płatnych na końcu każdego roku. Raty płacone w pierwszych *2n* latach tworzą ciąg arytmetyczny rosnący o wyrazie pierwszym *P* i różnicy *Q*, natomiast raty płacone w ostatnich *n* latach tworzą ciąg arytmetyczny malejący o wyrazie pierwszym *S* i różnicy *T*. Oblicz ile wynosi różnica pomiędzy wysokością odsetek zapłaconych w *n+1* racie, a wysokością odsetek zapłaconych w *2n+2* racie.
Wskaż właściwy wzór.

A) $(Q+v^n S)a_{\overline{n}|} - Ta_{\overline{n-1}|} - (S-nT)v^{2n} + (S+P-nQ)v^n + (Q+nT)v^{n-1} + (P-nQ-S+T)$

B) $(Q+v^n T)a_{\overline{n}|} - Sa_{\overline{n-1}|} + (S-nT)v^{2n} + (P-S-2nQ)v^n + (T+nS)v^{n-1} - (P+nQ+S-T)$

C) $(Q+v^n T)a_{\overline{n}|} - Ta_{\overline{n-1}|} - (S+nT)v^{2n} + (S-P-2nQ)v^n + (S+nT)v^{n-1} + (P+nQ-S-T)$

D) $(P+v^n S)a_{\overline{n}|} - Sa_{\overline{n-1}|} - (T+nS)v^{2n} + (S-P+2nQ)v^n + (S-nT)v^{n-1} - (P+nQ-S+T)$

E) $(P+v^n S)a_{\overline{n}|} - Ta_{\overline{n-1}|} - (T-nS)v^{2n} + (S+P+2nQ)v^n + (T-nS)v^{n-1} + (P-nQ+S-T)$

5. Przyjmując założenia rynku finansowego zgodne z modelem Blacka-Scholesa wiadomo, że:

i. intensywność rocznej stopy wolnej od ryzyka r jest stała i wynosi 0.04 (kapitalizacja ciągła);

ii. dane jest $S(t)$ oznaczające proces ceny akcji zależny od czasu t, $t \geq 0$. Akcja $S(t)$ płaci stopę dywidendy δ, kwota dywidendy wynosi $\delta \cdot S(t) \cdot dt$ w okresie czasu między t a $(t + dt)$;

iii. proces ceny akcji jest log-normalny postaci $S(t) = S(0) \cdot exp[(r - \delta - 0.5\sigma^2)t + \sigma \cdot W(t)]$ przy mierze neutralnej względem ryzyka;

iv. proces ceny akcji jest log-normalny postaci $S(t) = S(0) \cdot exp[(\alpha - \delta - 0.5\sigma^2)t + \sigma \cdot W(t)]$ przy realnej mierze ryzyka;

v. σ oznacza zmienność ceny akcji; $\{W(t)\}_{t \geq 0}$ jest procesem Wienera oraz α jest obarczoną ryzykiem stopą zwrotu z akcji;

vi. przy mierze neutralnej względem ryzyka wyrażenie $\ln[S(5)/S(3)]$ ma rozkład normalny ze średnią 0.06;

vii. przy realnej mierze ryzyka wyrażenie $\ln[S(2)/S(1)]$ ma rozkład normalny ze średnią 0.1;

viii. w momencie $t = 0$ cena europejskiej opcji sprzedaży wystawionej na akcję $S(t)$wynosi 10;

ix. w momencie $t = 0$ przy osłonie *delta-hedging* (polegającej na zajęciu odpowiedniej pozycji w akcjach) jednej opcji sprzedaży wystawionej na akcję $S(t)$ koszt pozycji w akcjach $S(t)$ wynosi 20;

x. instrumenty finansowe, których ceny są determinowane przez ten sam czynnik niepewności mają jednakowe wskaźniki Sharpe'a tj. stosunki nadwyżki oczekiwanej stopy zwrotu ponad stopę wolną od ryzyka do odchylenia standardowego stopy zwrotu.

Wyznacz oczekiwaną na chwilę $t = 0$ stopę zwrotu z opcji sprzedaży wystawionej na akcję $S(t)$, podaj najbliższą wartość:

A) -22%
B) -20%
C) -18%
D) -15%
E) -10%

Wskazówka:

Procesem (standardowym) **Wienera** nazywamy proces $\{W(t)\}_{t \geq 0}$ z czasem ciągłym spełniający warunki:

1) $W_0 = 0$;
2) przyrosty procesu Wsą niezależne, czyli dla dowolnego *n* i dowolnego ciągu $0 < t_1 < \cdots < t_n$, zmienne losowe $W(t_1), W(t_2) - W(t_1)$,…, $W(t_n) - W(t_{n-1})$ są niezależne;
3) dla dowolnych $0 \leq s < t$ przyrost $W(t) - W(s)$ ma rozkład gaussowski, a dokładniej: $[W(t) - W(s)] \sim N(0, t - s)$;
4) proces W jest ciągły, tzn. prawie wszystkie trajektorie procesu są funkcjami ciągłymi.

6. W chwili $t = 0$ na rynku dostępna jest akcja $S(t)$ o obecnej cenie PLN 32 oraz trzy-miesięczna europejska opcja kupna wystawiona na akcję $S(t)$ o cenie wykonania X = PLN 32. Wiadomo, że parametr zmienności (*volatility*) akcji $S(t)$ wynosi $\sigma = 0.3$ oraz parametr *delta* opcji kupna wynosi 0.5567.

Wiedząc, że roczna intensywność oprocentowania stopy wolnej od ryzyka jest stała i wynosi $r = 0.04$ (kapitalizacja ciągła) oraz parametr dla opcji kupna $d_2 = 0.0175$ wskaż, które z poniższych wyrażeń opisuje na moment $t = 0$ cenę opcji kupna wystawioną na akcję $S(t)$ zgodnie z modelem wyceny opcji Blacka-Scholesa:

A) $17.81 - 12.64 \int_{-\infty}^{0.0175} e^{-x^2/2}\, dx$

B) $17.81 - 32.31 \int_{-\infty}^{0.0175} \mathrm{e}^{-\mathrm{x}^2/2}\, \mathrm{dx}$

C) $17.81 + 32.32 \int_{-\infty}^{0.0175} \mathrm{e}^{-\mathrm{x}^2/2}\, \mathrm{dx}$

D) $12.89 \int_{-\infty}^{0.0175} \mathrm{e}^{-\mathrm{x}^2/2}\, \mathrm{dx} - 17.81$

E) żadne z powyższych

Wskazówka:

$d_2 = \frac{\ln\frac{S_t}{X} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\cdot(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$, gdzie S_t- cena akcji w chwili t ; X-cena wykonania; σ- zmienność ceny akcji; r-stopa wolna od ryzyka; T- moment wykonania opcji.

7. Bank X emituje obligację o nominale PLN 200 000, okresie do wygaśnięcia 4 lata i kuponie 8.0% płatnym na koniec roku.

Na koniec każdego roku (łącznie z momentem zapadalności) odbywa się ocena wypłacalności dająca jeden z dwóch możliwych wyników: zachowanie lub utrata wypłacalności. Jeśli zostanie stwierdzona utrata wypłacalności kupon należny za dany rok zostanie pomniejszony o 30%, nastąpi w tym momencie wypłata 45% nominału obligacji i wygaśnięcie obligacji.

W oparciu o *rating* kredytowy banku X określone zostały prawdopodobieństwa niewypłacalności w każdym roku trwania obligacji. Prawdopodobieństwo utraty wypłacalności na koniec pierwszego roku wynosi 10%, w kolejnych latach wypłacalność determinują następujące prawdopodobieństwa warunkowe:

$$P\left(X_2^d | X_1^s\right) = 15\% \qquad P\left(X_3^d | X_2^s\right) = 25\% \qquad P\left(X_4^d | X_3^s\right) = j$$

gdzie $P\left(X_i^d | X_{i-1}^s\right)$ oznacza prawdopodobieństwo utraty wypłacalności na koniec roku i pod warunkiem, że na koniec roku *i-1* stwierdzono utrzymanie wypłacalności.

Obecna wartość godziwa obligacji przy stałej rocznej stopie procentowej 6.0% (kapitalizacja dyskretna) wynosi PLN 150 000.

Podaj najbliższą wartość prawdopodobieństwa j:

A) 35.09%
B) 47.18%
C) 59.56%
D) 67.68%
E) 75.19%

8. Rozważmy następujący model wyceny obligacji, w którym:

- dostępne są 4 obligacje zerokuponowe o nominale 1, które wygasają w chwilach 1, 2, 3 i 4, odpowiednio;
- ceny tych obligacji w chwili 0 wynoszą odpowiednio: $\mathrm{P}(0,1) = 0.900$, $\mathrm{P}(0,2) = 0.828$, $\mathrm{P}(0,3) = 0.792$, $\mathrm{P}(0,4) = 0.756$ (gdzie $\mathrm{P}(0,\mathrm{T})$ oznacza cenę w chwili 0 obligacji wygasającej w momencie T).

Wiadomo, że w chwili 1 wystąpi jeden z 3 możliwych stanów rynku: $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Ceny obligacji w chwili 1, w każdym ze stanów dane są w tabeli (gdzie $\mathrm{P}(1,\mathrm{T})$ oznacza cenę w chwili 1 obligacji wygasającej w momencie T):

	ω_1	ω_2	ω_3
$\mathrm{P}(1,2)$	0.950	0.900	0.870
$\mathrm{P}(1,3)$	0.900	0.870	0.840
$\mathrm{P}(1,4)$	0.880	x	0.780

Żadne transakcje nie są możliwe pomiędzy chwilami 0 i 1. Wartość x, przy której model ten jest wolny od arbitrażu wynosi (podać najbliższą wartość):

A) 0.780
B) 0.790
C) 0.800
D) 0.810
E) 0.820

9. *Duration* renty $(Da)_{\overline{10|}}$ wynosi 3.72, a renty $(Ia)_{\overline{10|}}$ wynosi 6.70. Stała stopa procentowa w ujęciu rocznym wynosi i. Przy tych założeniach *duration* renty $a_{\overline{10|}}$ wynosi (podać najbliższą odpowiedź):

A) 0.95
B) 4.73
C) 5.10
D) 9.19
E) 10.42

10. Rozważmy nieskończony ciąg rent nieskończonych. Renta wieczysta a_N startująca w roku N ≥ 1 płaci $1/_k$ na koniec każdego roku $k \geq$ N. Roczna stopa dyskontowa $i = 10\%$ $(v = 1/_{(1+i)})$. Niech α_N oznacza wartość obecną wypłat renty a_N wyznaczoną na początek roku 1. Suma wartości obecnych wypłat ze wszystkich rent a_N, czyli $\sum_1^{+\infty} \alpha_N$, wynosi (podać najbliższą odpowiedź):

A) 5

B) 10

C) 11

D) 12

E) $+\infty$

Egzamin dla Aktuariuszy z 28 maja 2012 r.

Matematyka finansowa

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko: ....

Pesel: ....

OZNACZENIE WERSJI TESTU ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	D	
2	E	
3	C	
4	C	
5	E	
6	A	
7	A	
8	D	
9	C	
10	B	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.