Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

LVIII Egzamin dla Aktuariuszy z 3 października 2011 r.

Część I

Matematyka finansowa

WERSJA TESTU A

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej:

....

Czas egzaminu: 100 minut

1. Bank oferuje trzy lokaty o zmiennym oprocentowaniu, z comiesięczną kapitalizacją odsetek:

- lokata A – 13 miesięczna z następującym oprocentowaniem w kolejnych miesiącach

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
3.0%	i	3.5%	3.6%	5.0%	j	3.8%	4.7%	5.6%	9.0%	7.5%	5.5%	6.6%

- lokata B – 9 miesięczna z następującym oprocentowaniem w kolejnych miesiącach:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
j	3.4%	3.8%	3.2%	5.3%	4.4%	6.0%	k	5.0%

- lokata C – 7 miesięczna z następującym oprocentowaniem w kolejnych miesiącach:

1	2	3	4	5	6	7
4.8%	k	3.8%	4.0%	i	3.4%	4.4%

Wiadomo, że inwestując środki w przedmiotowe lokaty uzyskuje się takie same wyniki inwestowania jak w przypadku analogicznych lokat (comiesięczna kapitalizacja oraz ten sam okres inwestycji) o odpowiednim stałym oprocentowaniu, które dla poszczególnych lokat wynosi: lokata A – 5%, lokata B – 4.8%, lokata C – 4.5%.

Wszystkie podane wyżej stopy procentowe (również te w tabelach) są to nominalne roczne stopy procentowe.

Oblicz sumę $i + j + k$. Podaj najbliższą wartość.

A) 14.8%

B) 15.2%

C) 15.6%

D) 16.0%

E) 16.4%

2. Renta wieczysta wypłaca raty na początku każdego nieparzystego roku. Wielkość raty wypłacanej na początku roku $2n+1$, gdzie $n=0,1,2$ ..., wynosi $\frac{(n+2)*(n+3)}{2^n}$.

Wskaż wzór wyrażający skapitalizowaną wartość tej renty na początku pierwszego roku, jeżeli czynnik dyskontowy jest równy v.

A) $\frac{48+24v^2+4v^4}{8+12v^2+6v^4+v^6}$

B) $\frac{48-4v^2-24v^4}{8+6v^2-12v^4+v^6}$

C) $\frac{48+24v^2-4v^4}{8-6v^2+12v^4+v^6}$

D) $\frac{48-4v^2+24v^4}{8+12v^2-6v^4-v^6}$

E) $\frac{48-24v^2+4v^4}{8-12v^2+6v^4-v^6}$

3. Bank udzielił klientowi kredytu o wartości K przy oprocentowaniu 15%. Kredyt będzie przekazany klientowi w formie renty wypłacającej tę samą kwotę (transzę) na początku każdego roku przez okres 10 lat.

Spłata kredytu odbywa się w ten sposób, że każda transza spłacana jest za pomocą 5 – letniej renty o jednakowych płatnościach na końcu każdego roku, przy czym pierwsza rata spłaty zostaje dokonana rok po otrzymaniu transzy kredytu.

W momencie wypłaty pierwszej transzy kredytu okazało się, że kredytobiorca nie jest w stanie spłacać kredytu w sposób poprzednio ustalony. Kredytobiorca zaproponował, że będzie spłacał każdą transzę 5 – letnią rentą płatną na końcu każdego roku, przy czym rata płatna na końcu roku k będzie równa $(1 - k/100) \cdot r$, gdzie r oznacza pierwotną wielkość raty spłaty.

Zakładając, że bank przyjmie propozycję kredytobiorcy należy zauważyć, że gdyby bank w chwili wypłaty pierwszej transzy powyższego kredytu zainwestował odpowiednią kwotę w funduszu inwestycyjnym ze stopą zwrotu na poziomie 10%, to byłoby to wystarczające, aby wypłaty z funduszu dokonywane na końcu każdego roku pokryły różnicę pomiędzy łączną wpłatą, jak miała być dokonana przez kredytobiorcę, a wpłatą faktyczną.

Wiedząc, że minimalna wielkość powyższej kwoty wynosi 4 465.80 oblicz ile wynosi K.

Podaj najbliższą wartość.

A) 120 000
B) 130 000
C) 140 000
D) 150 000
E) 160 000

4. Kredyt w wysokości 400 000 jest spłacany w ciągu 30 lat w następujący sposób:

- w ciągu pierwszego 15-letniego okresu spłaty raty są płatne na końcu każdego roku,
- w ciągu kolejnego 15-letniego okresu spłaty raty są płatne na końcu każdego półrocza.

Wiadomo, że suma zapłaconych rat w ciągu pierwszego 15-lecia będzie o 50% większa niż suma rat w drugim15-leciu, jednakże w trakcie każdego z tych dwóch okresów wysokość raty pozostaje stała.

Przy kalkulacji wysokości rat założono, że efektywna roczna stopa procentowa w trakcie pierwszego 15-letniego okresu spłaty wynosi 10% oraz, że nominalna roczna stopa procentowa w trakcie drugiego 15-letniego okresu spłaty wynosi 12%.

Natychmiast po zapłaceniu 18 raty kredytobiorca otrzymał od tego samego banku dodatkowy kredyt w wysokości L w związku, z czym zostały zmienione zasady spłaty obecnego łącznego zadłużenia.

Zgodnie z nowymi zasadami, raty mają być płatne na końcu każdego kwartału przez okres pozostający do końca oryginalnie ustalonego terminu spłaty oraz że ich wysokość pozostaje stała. Do kalkulacji zmodyfikowanej wartości raty użyto nominalnej rocznej stopy procentowej 16%.

Oblicz L jeśli wiadomo, że suma faktycznie zapłaconych odsetek przez kredytobiorcę będzie o 20% większa od sumy odsetek która zostałaby zapłacona, gdyby nie nastąpiły żadne zmiany
Podaj najbliższą wartość.

A) 39 690
B) 41 690
C) 43 690
D) 45 690
E) 47 690

5. Siedmioletnia obligacja o nominale 1 000 PLN i stałym rocznym kuponie, w piątą rocznicę emisji wyceniana jest na 1 018.33 PLN (wycena po płatności piątego kuponu). Roczna stopa wola od ryzyka jest stała i wynosi w rozważanym momencie 6%. Wiadomo ponadto, że w piątą rocznicę emisji dla tej obligacji:

$Modified\ Duration = 1.826$ i $Convexity = 5.109$.

Ile wynosiłaby cena tej obligacji w piątą rocznicę emisji przy natychmiastowym wzroście stopy wolnej od ryzyka do 6.5%? Podać najbliższą odpowiedź.

A) 1 009.10

B) 1 009.01

C) 1 008.97

D) 1 008.56

E) 1 007.95

6. Bank rozważa wprowadzenie do swojej oferty produktu oszczędnościowego, który przy możliwości inwestowania w pewien indeks akcji I jednocześnie oferuje minimalną, gwarantowaną wysokość środków w momencie wygaśnięcia. Produkt ten ma być jednorocznym kontraktem, który klientowi lokującemu kwotę K wypłaca za rok kwotę:

$$K \cdot \delta \cdot max\left[\frac{I(1)}{I(0)}, 1\right],$$

gdzie: $I(0)$ oznacza wartość indeksu I w chwili zakupu produktu, $I(1)$ wartość tego indeksu za rok, a δ pewną liczbę z przedziału $[0,1]$. Przy następujących parametrach wyznaczyć liczbę δ, tak by bank nie osiągnął straty ani zysku na opisanym kontrakcie:

- indeks I zawiera wypłaty dywidend, czyli skonstruowany jest przy założeniu, że dywidendy są natychmiast reinwestowane w ten sam indeks,
- $I(0) = 1000$,
- w chwili 0 cena europejskiej opcji kupna na indeks I z ceną wykonania 1000 i terminem wykonania za rok wynosi 157.50,
- intensywność oprocentowania wynosi 3%.

Podać najbliższą odpowiedź:

A) 84.2%
B) 86.4%
C) 86.7%
D) 88.7%
E) 95.6%

7. W chwili obecnej cena niepłacącej dywidendy akcji S wynosi 18. Wiadomo, że za 6 miesięcy cena tej akcji wzrośnie do wysokości 22 albo spadnie do wysokości 14. Cena europejskiej opcji kupna na tę akcję, z terminem wykonania za 6 miesięcy i ceną wykonania 20 wynosi 1.25. Ponadto, roczna stopa wolna od ryzyka wynosi 6%. Które, z poniższych stwierdzeń jest prawdziwe, przy założeniu, że nie istnieją koszty transakcji, aktywa są idealnie podzielne, a oprocentowanie depozytów i pożyczek jest takie samo i równe stopie wolnej od ryzyka?

A) Nie istnieje możliwość osiągnięcia zysku arbitrażowego.

B) Istnieje możliwość osiągnięcia zysku arbitrażowego w wysokości 0.15, jeśli: kupimy opisaną opcję kupna, sprzedamy 0.25 akcji i złożymy depozyt w wysokości 3.40.

C) Istnieje możliwość osiągnięcia zysku arbitrażowego w wysokości 0.15, jeśli: sprzedamy opisaną opcję kupna, kupimy 0.25 akcji i zaciągniemy pożyczkę w wysokości 3.40.

D) Istnieje możliwość osiągnięcia zysku arbitrażowego w wysokości 0.30, jeśli: kupimy opisaną opcję kupna, sprzedamy 0.5 akcji i złożymy depozyt w wysokości 9.05.

E) Istnieje możliwość osiągnięcia zysku arbitrażowego w wysokości 0.30, jeśli: sprzedamy opisaną opcję kupna, kupimy 0.5 akcji i zaciągniemy pożyczkę w wysokości 9.05.

8. Wiadomo, że w chwili 0 cena obligacji zerokuponowej zapadającej w chwili $T > 0$ wynosi:

$$P(0,T) = \exp(-0.2T), \qquad T > 0.$$

Wiadomo ponadto, że krzywa stóp spot ma postać $R(0,s) = 0.2$, dla $0 \le s < 1$. Następnie, począwszy od chwili $s = 1$, z prawdopodobieństwem $q > 0$ opisuje ją funkcja

$$R(1,s) = 0.2 + u(s), \qquad s \ge 1,$$

zaś z prawdopodobieństwem $1 - q$ opisuje ją funkcja

$$R(1,s) = 0.2 - d(s), \qquad s \ge 1,$$

dla pewnych ściśle dodatnich krzywych dochodowości $u(s), d(s)$. Załóżmy, że $u(s)$ jest ustaloną funkcją, zaś $d(2)$ jest znane oraz, że rynek nie dopuszcza arbitrażu. Ile wynosi $\lim_{s\to\infty} d(s)$? Podaj najbliższą odpowiedź.

A) $\exp(-2)$

B) $\exp(-0.2)$

C) 0

D) 1

E) $+\infty$

9. Fundusz emerytalny dysponuje w chwili obecnej ($t = 0$) pakietem obligacji rządowych A o terminie zapadalności 25 lat, łącznym nominale 1 mln PLN i rocznym kuponie 6% płatnym z dołu. Zarządzający portfelem obligacji chce zabezpieczyć obecną wartość ekspozycji przeciw wahaniom stopy procentowej w krótkim okresie czasu. W tym celu rozważa przyjęcie krótkiej pozycji w kontraktach *futures* o krótkim okresie zapadalności, każdy wystawiony na obligacje rządową B o nominale 100 tys. PLN, kuponie rocznym 5% płatnym z dołu oraz okresie wygaśnięcia 15 lat. Zarządzający zakłada ponadto, że stopy dochodowości obligacji mierzone na chwilę obecną wynoszą odpowiednio 8% w skali roku dla każdej obligacji z pakietu A oraz 6% w skali roku dla obligacji B oraz że wahania obu tych stóp są takie same, co do wartości wyrażonych w punktach procentowych. Cena terminowa kontraktu *futures* jest ustalona, jako obecna (na moment $t = 0$) cena obligacji B.

Liczba kontraktów *futures* (każdy wystawiony na jedną obligację B), w których krótka pozycja najlepiej osłoni pakiet obligacji A przed krótkoterminowymi i nieznacznymi wahaniami stopy procentowej (zakładamy model dyskretny oraz rynek doskonały bez kosztów transakcji i z idealną podzielnością aktywów) wynosi:

A) 9.20
B) 9.37
C) 9.75
D) 9.93
E) 12.15

10. Rozważmy dostępną na rynku **opcję wyboru** (*chooser option*), tj. kontrakt, którego nabywca ma prawo wyboru w ustalonej przyszłej chwili T_0 (przed chwilą wygaśnięcia T): czy kontrakt jest europejską opcją kupna, czy europejską opcją sprzedaży. Obie te opcje wystawione są na ten sam instrument bazowy, którego cenę opisuje proces $\{S_t\}_{t \le T}$, i mają tą samą cenę wykonania K i termin do wygaśnięcia T.

W chwili obecnej ($t = 0$) przed momentem wyboru T_0, uczestnik rynku chce wycenić opcję wyboru o następujących parametrach: obecna cena instrumentu bazowego $S_0 = 120\ PLN$; zmienność (odchylenie standardowe) tej ceny $\sigma = 0.1$ rocznie; cena wykonania $K = 150\ PLN$; okres do momentu wygaśnięcia T równy 5 lat; okres do momentu wyboru T_0 równy 3 lata.

Uczestnik rynku ma w chwili obecnej ($t = 0$) do dyspozycji kwotowania waniliowych, europejskich opcji sprzedaży wystawionych na instrument $\{S_t\}_{t \le T}$ o zadanych w poniższej tabeli cenach wykonania i okresach do wygaśnięcia:

Cena wykonania / Okres do wygaśnięcia	126.42 (PLN)	133.84 (PLN)	150.00 (PLN)	168.11 (PLN)	177.97 (PLN)
2 lata	3.58	6.46	16.10	30.46	38.97
3 lata	2.86	4.94	12.10	23.72	31.08
5 lat	1.83	3.01	7.16	14.48	19.53

Podaj obecną (na moment $t = 0$) cenę opcji wyboru o parametrach (S_0, K, T, T_0) przyjmując model ciągły ze stałą stopą wolną od ryzyka $r = 5.7\%$:

A) 11.34
B) 14.35
C) 16.10
D) 17.77
E) 19.30

Egzamin dla Aktuariuszy z 3 października 2011 r.

Matematyka finansowa

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko: ....

Pesel: ....

OZNACZENIE WERSJI TESTU ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	B	
2	E	
3	A	
4	D	
5	A	
6	D	
7	C	
8	C	
9	C	
10	E	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.
♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.