

Zadanie 1

Niech X_1, \dots, X_n będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu o gęstości

$$f(x) = 2\theta x e^{-\theta x^2} \text{ gdy } x > 0.$$

Estymujemy dodatni parametr θ wykorzystując estymator największej wiarygodności $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

Wyznaczyć w przybliżeniu rozmiar próbki n taki, żeby

$$\Pr\left(\frac{|\hat{\theta} - \theta|}{\theta} \leq 0.01\right) \approx 0.95.$$

Posłużyć się aproksymacją rozkładem normalnym.

- (A) 1000
- (B) 49729
- (C) 26896
- (D) 40000
- (E) 38416

Zadanie 2

Założmy, że niezależne zmienne losowe X_1, X_2, \dots, X_n mają rozkłady wykładnicze o wartościach oczekiwanych równych $EX_i = \frac{1}{i}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Wtedy prawdopodobieństwo $P(X_1 = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\})$ jest równe

- (A) $\frac{2}{n}$
- (B) $\frac{2}{n^2 + n + 2}$
- (C) $\frac{2}{n^2 + n - 2}$
- (D) $\frac{2}{n^2 + n}$
- (E) $\frac{2}{n^2 + 1}$

Zadanie 3

Niech X_1, X_2, \dots, X_{10} będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu Pareto o gęstości

$$p_\theta(x) = \begin{cases} \frac{\theta}{(1+x)^{\theta+1}} & \text{gdy } x > 0, \\ 0 & \text{gdy } x \leq 0 \end{cases},$$

a Y_1, Y_2, \dots, Y_5 będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu Pareto o gęstości

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{2\theta}{(1+x)^{2\theta+1}} & \text{gdy } x > 0. \\ 0 & \text{gdy } x \leq 0 \end{cases}.$$

Wszystkie zmienne są niezależne. Parametr $\theta > 0$ jest nieznan. Weryfikujemy hipotezę $H_0 : \theta = 1$ przy alternatywie $H_0 : \theta > 1$ za pomocą testu jednostajnie najmocniejszego na poziomie istotności 0,05. Hipotezę H_0 odrzucamy gdy spełniona jest nierówność

(A) $\sum_{i=1}^{10} \ln(1 + X_i) + 2 \sum_{i=1}^5 \ln(1 + Y_i) > 43,77$

(B) $\sum_{i=1}^{10} \ln(1 + X_i) + 2 \sum_{i=1}^5 \ln(1 + Y_i) < 18,31$

(C) $\sum_{i=1}^{10} \ln(1 + X_i) + 2 \sum_{i=1}^5 \ln(1 + Y_i) < 9,25$

(D) $2 \sum_{i=1}^{10} \ln(1 + X_i) + \sum_{i=1}^5 \ln(1 + Y_i) < 7,26$

(E) $2 \sum_{i=1}^{10} \ln(1 + X_i) + \sum_{i=1}^5 \ln(1 + Y_i) > 12,50$

Zadanie 4

Zmienna losowa N ma rozkład geometryczny postaci

$$P(N = k) = \left(\frac{1}{4}\right)^k \frac{3}{4} \quad \text{dla } k = 0, 1, 2, \dots$$

Rozważamy losową liczbę zmiennych losowych X_1, X_2, \dots, X_N , przy czym zmienne losowe X_1, X_2, \dots, X_N są niezależne wzajemnie i niezależne od zmiennej losowej N . Każda ze zmiennych losowych X_i ma ten sam rozkład o parametrach

$$EX = 1, \quad E(X^2) = 2, \quad E(X^3) = 3.$$

Niech

$$S_N = \begin{cases} \sum_{i=1}^N X_i & \text{gdy } N > 0 \\ 0 & \text{gdy } N = 0 \end{cases}.$$

Współczynnik skośności $\frac{E(S_N - ES_N)^3}{(\text{Var}S_N)^{3/2}}$ jest równy

- (A) 2,336
- (B) 2,538
- (C) -1,168
- (D) 1,269
- (E) -0,491

Zadanie 5

Przeprowadzamy wśród wylosowanych osób ankietę na delikatny temat. Ankietowana osoba rzuca kostką do gry, i w zależności od wyniku rzutu kostką (wyniku tego nie zna ankieter) podaje odpowiednio zakodowaną odpowiedź na pytanie:

„Czy zdarzyło się Panu/Pani w roku 2009 dać łapówkę w klasycznej formie pieniężnej, przekraczającą kwotę 100 zł?”

Przyjmijmy, iż interesująca nas cecha X przyjmuje wartości:

- $X = 1$ jeśli odpowiedź brzmi „TAK”,
- $X = 0$ jeśli odpowiedź brzmi „NIE”,

Pierwszych 200 osób udziela odpowiedzi Z_1, \dots, Z_{200} zgodnie z regułą:

- Jeśli wynik rzutu kostką to liczba oczek równa 1, 2, 3 lub 4, to:
 $Z_i = X_i$
- jeśli wynik rzutu kostką to liczba oczek równa 5 lub 6, to:
 $Z_i = 1 - X_i$

Następnych 200 osób udziela odpowiedzi Z_{201}, \dots, Z_{400} zgodnie z regułą:

- jeśli wynik rzutu kostką to liczba oczek równa 1, lub 2, to:
 $Z_i = X_i$
- jeśli wynik rzutu kostką to liczba oczek równa 3, 4, 5 lub 6, to:
 $Z_i = 1 - X_i$

Dla uproszczenia zakładamy, że 400 ankietowanych osób to próba prosta z (hipotetycznej) populacji o nieskończonej liczebności, a podział na podpróby jest także całkowicie losowy. Interesujący nas parametr tej populacji to oczywiście

$$q = P(X = 1)$$

Niech

$$\bar{Z}_1 = \frac{1}{200} \cdot \sum_{i=1}^{200} Z_i, \quad \bar{Z}_2 = \frac{1}{200} \cdot \sum_{i=201}^{400} Z_i.$$

Estymator parametru q uzyskany metodą największej wiarygodności jest równy

(A) $-\bar{Z}_1 + 2\bar{Z}_2$

(B) $2\bar{Z}_1 - \bar{Z}_2$

(C) $\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\bar{Z}_1 + \frac{3}{2}\bar{Z}_2$

(D) $\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\bar{Z}_1 - \frac{3}{2}\bar{Z}_2$

(E) $-\frac{1}{2} + \frac{5}{2}\bar{Z}_1 - \frac{1}{2}\bar{Z}_2$

Zadanie 6

O zmiennych losowych X_1, X_2, \dots, X_n o tej samej wartości oczekiwanej równej μ oraz tej samej wariancji równej σ^2 zakładamy, iż:

$$COV(X_i, X_j) = \rho \cdot \sigma^2 \quad \text{dla } i \neq j.$$

Zmienne losowe $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ są nawzajem niezależne oraz niezależne od zmiennych losowych X_1, X_2, \dots, X_n , i mają rozkłady prawdopodobieństwa postaci:

$$P(\varepsilon_i = 1) = P\left(\varepsilon_i = \frac{1}{2}\right) = P(\varepsilon_i = 0) = \frac{1}{3}.$$

Wariancja zmiennej losowej $S = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \cdot X_i$ jest równa

- (A) $\frac{n}{12} (5\sigma^2 + 2\mu^2 + 3(n-1)\rho\sigma^2)$
- (B) $\frac{n}{12} (2\sigma^2 + 3(n-1)\rho\sigma^2)$
- (C) $\frac{n}{12} \left(5\sigma^2 + 2\mu^2 + \frac{3}{2}(n-1)\rho\sigma^2 \right)$
- (D) $\frac{n}{12} (5\sigma^2 + 2\mu^2 + 6(n-1)\rho\sigma^2)$
- (E) $\frac{n}{12} (5\sigma^2 + 3(n-1)\rho\sigma^2)$

Zadanie 7

Mamy dwie urny: I i II. Na początku doświadczenia w każdej z urn znajdują się 2 kule białe i 2 czarne. Losujemy po jednej kuli z każdej urny - po czym kulę wylosowaną z urny I wrzucamy do urny II, a tę wylosowaną z urny II wrzucamy do urny I. Czynność tę powtarzamy wielokrotnie. Granica (przy $n \rightarrow \infty$) prawdopodobieństwa, iż obie kule wylosowane w n -tym kroku są jednakowego koloru, wynosi:

(A) $\frac{2}{7}$

(B) $\frac{1}{2}$

(C) $\frac{3}{7}$

(D) $\frac{4}{7}$

(E) $\frac{1}{3}$

Zadanie 8

Niech X_1, X_2, \dots, X_n będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie o gęstości

$$p_{a,b}(x) = \begin{cases} be^{-b(x-a)} & \text{gdy } x \geq a \\ 0 & \text{gdy } x < a \end{cases}$$

gdzie $a \in \mathbb{R}$ i $b > 0$ są nieznanymi parametrami. Rozważamy estymator największej wiarygodności (T_a, T_b) wektora parametrów (a, b) .

Wartości oczekiwane ET_a i ET_b są równe

(A) $ET_a = a - \frac{1}{nb}$ i $ET_b = b$

(B) $ET_a = a + \frac{1}{n}$ i $ET_b = \frac{n}{n-1}b$

(C) $ET_a = a + \frac{1}{nb}$ i $ET_b = \frac{n}{n-1}b$

(D) $ET_a = a + \frac{1}{nb}$ i $ET_b = \frac{n}{n-2}b$

(E) $ET_a = a + \frac{1}{nb}$ i $ET_b = b$

Zadanie 9

Zmienne losowe X i Y są niezależne i zmienna X ma rozkład logarytmiczno-normalny $LN(\mu, \sigma^2)$, gdzie $\mu = 1$ i $\sigma = 2$, a zmienna Y ma rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej 2. Niech $S = X + Y$. Wtedy $E(S | X > e)$ jest równa

- (A) 40,17
- (B) 9,22
- (C) 21,63
- (D) 16,44
- (E) 41,26

Zadanie 10

Niech X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu wykładniczego o gęstości

$$p_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{gdy } x \geq 0 \\ 0 & \text{gdy } x < 0 \end{cases},$$

gdzie $\lambda > 0$ jest nieznanym parametrem. Niestety nie obserwujemy zmiennych X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 ale zmienne $Y_i = [X_i]$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, gdzie symbol $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x (największą liczbę całkowitą $n \leq x$).

Dysponując próbką Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5 weryfikujemy hipotezę $H_0 : \lambda = 1$, przy alternatywie $H_1 : \lambda = 3$ za pomocą testu o obszarze krytycznym

$$K = \{\hat{\lambda} > 1,79\},$$

gdzie $\hat{\lambda}$ oznacza estymator największej wiarygodności parametru λ otrzymany na podstawie próby losowej Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5 . Rozmiar tego testu jest równy (wybierz najlepsze przybliżenie)

- (A) 0,100
- (B) 0,156
- (C) 0,286
- (D) 0,186
- (E) 0,050

Egzamin dla Aktuariuszy z 4 października 2010 r.**Prawdopodobieństwo i Statystyka****Arkusz odpowiedzi***

Imię i nazwisko :

Pesel

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja [♦]
1	E	
2	D	
3	C	
4	B	
5	D	
6	A	
7	C	
8	D	
9	E	
10	C	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.