

**Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy**

**LIV Egzamin dla Aktuariuszy z 4 października 2010 r.**

**Część II**

**Matematyka ubezpieczeń życiowych**

**Imię i nazwisko osoby egzaminowanej: .....Klucz odpowiedzi.....**

Czas egzaminu: 100 minut

Warszawa, 4 października 2010 r.

1. Dane jest  $q_x = 0,05$ . Oblicz

$$\bar{A}_{x:\overline{1}|}^1(UDD) - \bar{A}_{x:\overline{1}|}^1(CF),$$

gdzie UDD w pierwszym nawiasie oznacza, że odpowiednią składkę obliczono przy założeniu interpolacyjnym UDD (o jednostajnym rozkładzie śmierci w ciągu roku); natomiast CF w drugim nawiasie oznacza zastosowanie do obliczenia składki założenia o stałym natężeniu umierania między kolejnymi wiekami całkowitymi (*constant force assumption*).

Techniczna intensywność oprocentowania wynosi  $\delta = 0,08$ .

Wybierz odpowiedź najbliższą.

- (A)  $-0,0000064$     (B)  $0,0000064$     (C)  $-0,0000164$     (D)  $0,0000164$   
(E)  $0,0000264$ .

2. Niech  $\bar{A}_x(\omega, \delta)$  dla  $0 < x < \omega$  oznacza składkę jednorazową netto za ubezpieczenie bezterminowe ciągłe dla  $(x)$  wypłacające 1 w chwili śmierci, przy czym  $(x)$  jest wylosowany z populacji de Moivre'a z wiekiem granicznym  $\omega$ , a techniczna intensywność oprocentowania użyta w rachunkach wynosi  $\delta > 0$ . Jeśli

$$\bar{A}_x(\omega + \Delta\omega, \delta + \Delta\delta) = \bar{A}_x(\omega, \delta)$$

to mamy przybliżoną równość:

$$(A) \quad \frac{\Delta\delta}{\Delta\omega} = \frac{\delta}{(\omega-x)}, \quad (B) \quad \frac{\Delta\delta}{\Delta\omega} = -\frac{\delta^2}{\omega-x}, \quad (C) \quad \frac{\Delta\delta}{\Delta\omega} = -\frac{\delta}{(\omega-x)^2},$$

$$(D) \quad \frac{\Delta\delta}{\Delta\omega} = -\frac{\delta}{\omega-x}, \quad (E) \quad \frac{\Delta\delta}{\Delta\omega} = -\frac{\delta^2}{(\omega-x)^2}.$$

- 
3. Rozpatrujemy ciągły model ubezpieczenia na życie dla osoby (50) z populacji de Moivre'a z parametrem  $\omega = 100$ . Jeśli ubezpieczony umrze w wieku  $(50+t)$ , to polisa zaczyna wypłacać uposażonym rentę płatną z roczną intensywnością 10 000 przez okres przeciętnego dalszego trwania życia osoby w wieku  $(50+t)$ . Oblicz jednorazową składkę netto w tym ubezpieczeniu dla  $\delta = 0,05$ . Wskaż najbliższą wartość.
- (A) 40 730      (B) 44 620      (C) 48 960      (D) 52 630  
(E) 56 140

4. Rozważamy dyskretny typ bezterminowego ubezpieczenia na życie (50) z rosnącą sumą ubezpieczenia  $Z(k+1) = S + B(k+1)$ , gdzie  $S$  jest kwotą bazową, a  $B(k+1)$  bonusem na koniec  $k+1$  roku ubezpieczenia. W momencie wystawienia polisy  $B(0) = B$ , a następnie przed każdą  $n$ -tą rocznicą polisy bonus zwiększa się do poziomu  $B(n) = a \cdot S + (1+b) \cdot B(n-1)$ .

Przykładowo, śmierć w pierwszym roku ubezpieczenia spowoduje wypłatę na koniec roku w wysokości  $Z(1) = S + a \cdot S + (1+b) \cdot B$ .

Wyznacz jednorazową składkę netto za to ubezpieczenie, jeśli

$$S = 100\,000 \quad B = 10\,000 \quad a = 3\% \quad b = 4\% \quad i = 5\% ,$$

a ubezpieczeni pochodzą z populacji de Moivre'a z granicznym wiekiem  $\omega = 90$  lat. Wskaż najbliższą wartość.

- (A) 79 000      (B) 80 000      (C) 81 000      (D) 82 000  
(E) 83 000

5. Rozważamy ubezpieczenie kredytu hipotecznego w wysokości 1, który został udzielony ( $x$ ) wylosowanemu z populacji wykładniczej z natężeniem umierania  $\mu = 0,01$ . Kredyt ten będzie spłacany za pomocą renty ciągłej 30-letniej, przy czym intensywność raty spłacającej kapitał jest stała. Gdy kredytodawca umrze w ciągu najbliższych 30 lat to ubezpieczyciel wypłaci bankowi sumę ubezpieczenia równą saldu kredytu w chwili śmierci.
- Oblicz składkę jednorazową netto przyjmując techniczną intensywność oprocentowania na poziomie  $\delta = 0,03$ .

- (A) 0,1004      (B) 0,1014      (C) 0,1024      (D) 0,1034  
(E) 0,1044

6. Rozważamy model ciągły ubezpieczenia dla  $(x)$ , które polega na tym, że jeżeli umrze on przed osiągnięciem wieku  $m > x$  to uposażeni otrzymają sumę ubezpieczenia  $c_1 > 0$  w chwili śmierci. Natomiast jeśli umrze on w wieku późniejszym niż  $m$  to w chwili śmierci będzie wypłacona suma ubezpieczenia  $c_2 > 0$ . Składka za to ubezpieczenie jest płacona w formie renty życiowej ciągłej, przy czym do wieku  $m$  intensywność składki wynosi  $\bar{P}_1 > 0$  a potem  $\bar{P}_2 > 0$ . Wówczas skok pochodnej funkcji  $V(t)$  w punkcie  $t_0 = m - x$  dobrze przybliża formuła:

(A)  $\lim_{t \rightarrow t_0^+} V'(t) - \lim_{t \rightarrow t_0^-} V'(t) = \bar{P}_1 + \bar{P}_2 - (c_1 - c_2)\mu_m$

(B)  $\lim_{t \rightarrow t_0^+} V'(t) - \lim_{t \rightarrow t_0^-} V'(t) = \bar{P}_1 - \bar{P}_2 - c_1 + c_2$

(C)  $\lim_{t \rightarrow t_0^+} V'(t) - \lim_{t \rightarrow t_0^-} V'(t) = \bar{P}_1 + \bar{P}_2 - (c_1 + c_2)\mu_m$

(D)  $\lim_{t \rightarrow t_0^+} V'(t) - \lim_{t \rightarrow t_0^-} V'(t) = \bar{P}_1 - \bar{P}_2 - (c_1 - c_2)\mu_m$

(E)  $\lim_{t \rightarrow t_0^+} V'(t) - \lim_{t \rightarrow t_0^-} V'(t) = \bar{P}_1 + \bar{P}_2 - c_1 - c_2$

7. Rozpatrujemy dyskretny model terminowego ubezpieczenia na życie i dożycie z sumą ubezpieczenia 10 000 zł. Roczna składka brutto płacona jest w stałej wysokości na początku każdego roku ubezpieczenia. Koszty administracyjne ponoszone są w każdym roku ubezpieczenia w stałej wysokości i wynoszą 500 zł wg wartości na początek roku. Koszty początkowe są rozliczane metodą Zillmera. Po dwóch latach ubezpieczenia rezerwa brutto osiągnęła 41,70 zł, a po trzech latach 241,60 zł. Wiadomo, że w trzecim roku ubezpieczenia oszczędnościowa część składki wynosi 166,54 zł. Stopa techniczna  $i=5\%$ . Oblicz współczynnik kosztów początkowych (w punktach procentowych sumy ubezpieczenia). Wskaż najbliższą wartość.

- (A) 3,1                      (B) 3,2                      (C) 3,3                      (D) 3,4  
(E) 3,5



8. Rozważamy emeryturę małżeńską dla  $(x)$  i  $(y)$ , która zacznie wypłacać natychmiast według następujących reguł. Póki żyją oboje otrzymują emeryturę z intensywnością  $A > 0$ . Po pierwszej śmierci owdowiała osoba będzie nadal otrzymywać emeryturę z intensywnością  $A$ , ale tylko przez 3 lata (lub krócej, gdy umrze w ciągu tych trzech lat). Po upływie trzech lat od pierwszej śmierci owdowiała osoba (o ile żyje) otrzymuje emeryturę z intensywnością  $B < A$ .

Który z podanych wzorów na  $SJN$  jest prawdziwy?

Zakładamy, że nie ma wieku granicznego oraz że  $T(x)$  i  $T(y)$  są niezależne. Do rachunków użyto technicznej intensywności oprocentowania na poziomie  $\delta > 0$ .

(A)

$$\begin{aligned}
 SJN = & A \int_0^3 e^{-\delta t} ({}_t p_x + {}_t p_y - {}_t p_x {}_t p_y) dt + B \int_3^\infty e^{-\delta t} ({}_t p_x + {}_t p_y - {}_t p_x {}_t p_y) dt \\
 & + (A - B) \int_3^\infty e^{-\delta t} ({}_{t-3} p_x {}_t p_y + {}_{t-3} p_y {}_t p_x - {}_t p_x {}_t p_y) dt
 \end{aligned}$$

(B)

$$\begin{aligned}
 SJN = & A \int_0^3 e^{-\delta t} ({}_t p_x + {}_t p_y - {}_t p_x {}_t p_y) dt + B \int_3^\infty e^{-\delta t} ({}_t p_x + {}_t p_y - {}_t p_x {}_t p_y) dt \\
 & + (A - B) \int_3^\infty e^{-\delta t} ({}_{t-3} p_x {}_t p_y + {}_{t-3} p_y {}_t p_x - 2 {}_t p_x {}_t p_y) dt
 \end{aligned}$$

(C)

$$\begin{aligned}
 SJN = & A \int_0^3 e^{-\delta t} ({}_t p_x + {}_t p_y - {}_t p_x {}_t p_y) dt + B \int_3^\infty e^{-\delta t} ({}_t p_x + {}_t p_y - {}_t p_x {}_t p_y) dt \\
 & + A \int_3^\infty e^{-\delta t} ({}_{t-3} p_x {}_t p_y + {}_{t-3} p_y {}_t p_x - 2 {}_t p_x {}_t p_y) dt
 \end{aligned}$$

(D)

$$\begin{aligned}
 SJN = & A \int_0^3 e^{-\delta t} ({}_t p_x + {}_t p_y - {}_t p_x {}_t p_y) dt + B \int_0^\infty e^{-\delta t} ({}_t p_x + {}_t p_y - {}_t p_x {}_t p_y) dt \\
 & + (A - B) \int_3^\infty e^{-\delta t} ({}_{t-3} p_x {}_t p_y + {}_{t-3} p_y {}_t p_x - {}_t p_x {}_t p_y) dt
 \end{aligned}$$

(E) żaden z powyższych wzorów nie jest uniwersalnie prawdziwy.

9. Rozważamy roczne ubezpieczenie na życie wypłacające świadczenie śmiertelne 100 000 zł na koniec roku. Osoba ( $x$ ) jest narażona na dwa ryzyka śmierci:

- (1) standardowe ryzyko śmierci,
- (2) ryzyko związane z uprawianym przez tę osobę ekstremalnym sportem.

Wiadomo, że dla stopy technicznej  $i=0$  polisa wypłacająca tej osobie świadczenie tylko w przypadku zwykłej śmierci miałaby składkę netto 10 000 zł, natomiast polisa obejmująca wyłącznie śmierć w wyniku ekstremalnego sportu - składkę 30 000 zł.

Każde z dwóch ryzyk ma jednostajny rozkład zgonów w ciągu roku.

Podaj jednorazową składkę netto w analogicznym ubezpieczeniu dla osoby, która nie uprawia sportów ekstremalnych. Wskaż najbliższą wartość.

- (A) 11 100      (B) 11 300      (C) 11 500      (D) 11 700  
(E) 11 900

10. Rozważamy osobę ( $x$ ) wychodzącą z OFE z kapitałem  $K$  i kupującą dożywotnią emeryturę z gwarantowanym okresem wypłat  $n$ . Gwarantowany okres jest dobrany tak, by suma wypłat (bez oprocentowania) osiągnęła co najmniej 80% kapitału  $K$ . Przyjmij ciągły model wypłat emerytalnych. Podaj w miesiącach długość okresu gwarancyjnego, jeżeli emeryt pochodzi z populacji o wykładniczym czasie trwania życia z  $\mu = 0,15$  oraz  $\delta = 0,05$ .

Wskaż najbliższą wartość.

- (A) 51                      (B) 54                      (C) 57                      (D) 60  
(E) 63

**LIV Egzamin dla Aktuariuszy z 4 października 2010 r.****Matematyka ubezpieczeń życiowych****Arkusz odpowiedzi\***

Imię i nazwisko : .....Klucz odpowiedzi.....

Pesel .....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja <sup>♦</sup>
1	C	
2	D	
3	A	
4	C	
5	E	
6	D	
7	D	
8	B	
9	E	
10	D	

---

\* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.