Zadanie 1.
Zmienna losowa:
$X = Y_1 + ... + Y_N$
ma złożony rozkład Poissona. W tabeli poniżej podano rozkład prawdopodobieństwa składnika sumy Y_1. W tejże tabeli podano także obliczone dla $k = 0,1,...,4$ prawdopodobieństwa $\Pr(X = k)$.

k	$\Pr(Y_1 = k)$	$\Pr(X = k)$
0	0	0.36788
1	0.2	0.07358
2	0.3	0.11772
3	0.2	0.09614
4	0.1	0.07029
5	0.2	

Wobec tego $\Pr(X = 5)$ z dobrym przybliżeniem wynosi:

(A) 0.100

(B) 0.104

(C) 0.108

(D) 0.112

(E) 0.116

Zadanie 2.
Proces pojawiania się szkód w czasie $N(t)$ jest procesem o przyrostach niezależnych, o rozkładzie ujemnym dwumianowym danym dla każdego nieujemnego t oraz dodatniego s wzorem:

$$\Pr(N(t+s)-N(t)=k)=\frac{\Gamma(r\cdot s+k)}{k!\cdot\Gamma(r\cdot s)}\cdot(1-q)^{r\cdot s}\cdot q^k, \qquad k=0,1,...$$

gdzie $r=5$ oraz $q=\frac{3}{4}$ to parametry procesu.

Oblicz granicę prawdopodobieństw warunkowych:

$$\lim_{s\to 0}\Pr\big(N(t+s)-N(t)=1\,\big|\,N(t+s)-N(t)>0\big)$$

(A) 1

(B) $\frac{2}{3}$

(C) $\frac{3}{8}$

(D) $\frac{3}{8\ln 2}$

(E) $\frac{2}{3\ln 2}$

Zadanie 3.
Rozważamy klasyczny proces nadwyżki z zerową nadwyżką początkową $U(t) = ct - S_{N(t)}$, gdzie:

- ct jest sumą składek zgromadzonych do momentu t,
- $N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem intensywności λ,
- $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ jest sumą wartości n pierwszych szkód,
- wartości szkód $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ są i.i.d, niezależne od procesu $N(t)$.

O rozkładzie wartości pojedynczej szkody wiemy tylko tyle, że:

- $\Pr(Y_1 \in [0,1]) = 1$,
- $\mathrm{E}(Y_1) = 1/10$.

Wiemy też, że $c > \dfrac{\lambda}{10}$.

Wobec tego wartość oczekiwana deficytu w momencie ruiny (pod warunkiem że do ruiny dojdzie) może przyjmować różne wartości. Przedział, który zawiera wszystkie te wartości (i nic ponadto) jest postaci:

(A) $\left[\dfrac{1}{20}, \dfrac{1}{10}\right]$

(B) $\left[\dfrac{1}{30}, \dfrac{1}{3}\right]$

(C) $\left[\dfrac{1}{20}, \dfrac{1}{2}\right]$

(D) $\left[\dfrac{1}{30}, \dfrac{1}{10}\right]$

(E) $\left[\dfrac{1}{10}, \dfrac{1}{2}\right]$

Zadanie 4.
W pewnym ubezpieczeniu mamy do czynienia z ciągłym, liniowym wzrostem liczby ryzyk w portfelu, co wyraża założenie, iż zmienna $T_1 \in (0,1)$ wyrażająca moment zajścia losowo wybranej szkody z tego portfela w ciągu roku (o ile oczywiście do szkody dojdzie) ma rozkład dany gęstością:

- $f_1(t) = \frac{6}{7} + \frac{2}{7}t$.

Niech T_2 oznacza odstęp w czasie od momentu zajścia szkody do jej likwidacji. Zmienna ta ma rozkład wykładniczy z wartością oczekiwaną równą 3 (lata).

Zakładamy że zmienne losowe T_1 oraz T_2 są niezależne. Prawdopodobieństwo, iż szkoda, do której doszło w ciągu roku, pozostanie nie-zlikwidowana na koniec tego roku, z dobrym przybliżeniem wynosi:

(A) 71.7%

(B) 78.5%

(C) 82.8%

(D) 84.6%

(E) 85.7%

Zadanie 5.
W pewnym portfelu ryzyk łączna wartość szkód:

$$W = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_N$$

ma złożony rozkład Poissona o parametrze częstotliwości $\lambda = 100$ oraz rozkładzie wartości pojedynczej szkody *Y* wykładniczym z wartością oczekiwaną $E(Y) = 10$.
Niech:

$$W_M = \min\{Y_1, M\} + \ldots + \min\{Y_N, M\},$$

gdzie W_M oznacza tę część łącznej wartości szkód *W*, która pozostaje na udziale ubezpieczyciela po scedowaniu nadwyżki każdej szkody z tego portfela ponad *M* na reasekuratora. Aktualnie parametrem kontraktu reasekuracyjnego jest wartość zachowku $M = 50$. Rozważamy jednak możliwość zmiany tego parametru, oraz wpływ takiej zmiany na charakterystyki zmiennej losowej W_M.
Pochodna wariancji zmiennej W_M:

$$\left.\frac{\partial \mathrm{Var}(W_M)}{\partial M}\right|_{M=50}$$

wynosi (w przybliżeniu do jedynek):

(B) 50

(C) 55

(D) 61

(D) 67

(E) 75

Zadanie 6.

Rozważamy proces nadwyżki ubezpieczyciela z czasem dyskretnym postaci:

- $U_n = u + c \cdot n - S_n$, $\quad n = 0,1,2,\ldots,$ $\quad S_n = W_1 + W_2 + \ldots + W_n$,

gdzie zmienne $W_1, W_2, W_3, \ldots$ są niezależne i mają ten sam rozkład wykładniczy z wartością oczekiwaną równą jeden.

Jeśli parametry procesu wynoszą:

- $c = 2\ln 2$
- $u = 4\ln 2$

to prawdopodobieństwo ruiny w nieskończonym horyzoncie czasu wynosi:

(A) $\frac{1}{8}$

(B) $\frac{1}{8\sqrt{2}}$

(C) $\frac{1}{16}$

(D) $\frac{1}{16\sqrt{2}}$

(E) $\frac{1}{32}$

Zadanie 7.

Oznaczmy przez X_t łączną wartość szkód zaistniałych w roku *t*, przez $X_{t,0}$ tę jej część, która dotyczy szkód zlikwidowanych przed końcem roku *t*, zaś przez $X_{t,1}$ część pozostałą. Warunkowe momenty tych zmiennych (przy danej wartości parametru ryzyka μ_t) spełniają założenia:

- $E(X_{t,0}|\mu_t) = \mu_t p$
- $E(X_{t,1}|\mu_t) = \mu_t(1-p)$
- $Var(X_{t,0}|\mu_t) = \mu_t pb^2$
- $Var(X_{t,1}|\mu_t) = \mu_t(1-p)b^2$
- $Cov(X_{t,0}, X_{t,1}|\mu_t) = 0$,

zaś rozkład parametru ryzyka μ_t spełnia założenia:

- $E(\mu_t) = \mu$
- $Var(\mu_t) = a^2$

Najlepszy nieobciążony liniowy predyktor zmiennej $X_{t,1}$ oparty na informacji o zmiennej $X_{t,0}$ oraz znanych wartościach parametrów (p, b^2, μ, a^2) jest postaci:

- $BLUP(X_{t,1}|X_{t,0}) = cX_{t,0} + d$

Współczynnik *c* występujący w powyższym wzorze jest postaci:

(A) $c = \dfrac{(1-p)a^2}{p(\mu b^2 + a^2)}$

(B) $c = \dfrac{(1-p)a^2}{\mu b^2 + pa^2}$

(C) $c = \dfrac{(1-p)pa^2}{\mu b^2 + p^2a^2}$

(D) $c = \dfrac{(1-p)a^2}{b^2 + pa^2}$

(E) $c = \dfrac{(1-p)pa^2}{b^2 + p^2a^2}$

Zadanie 8.
$N, Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ to niezależne zmienne losowe, N ma rozkład Poissona z wartością oczekiwaną równą 10, zaś $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ mają identyczny rozkład Pareto o dystrybuancie określonej na półosi dodatniej wzorem:

- $F(y) = 1 - \left(\frac{1}{1+y}\right)^3$

Niech $M = \max\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_N\}$, przy czym jeśli $N = 0$, to przyjmujemy $M = 0$.
Niech $m_{0.95}$ oznacza taką liczbę, że $\Pr(M \le m_{0.95}) = 0.95$
Liczba $m_{0.95}$ wynosi (z przybliżeniem do jednej dziesiątej):

(A) 2.8

(B) 3.8

(C) 4.8

(D) 5.8

(E) 6.8

Zadanie 9.
W pewnym ubezpieczeniu proces pojawiania się szkód jest procesem Poissona z oczekiwaną liczbą szkód w ciągu roku równą 2, a wartości pojedynczych szkód (niezależne nawzajem i od procesu pojawiania się szkód) mają rozkład ciągły o gęstości równej 1 na przedziale $(0,1)$.

Ubezpieczony stosuje następującą strategię zgłaszania szkód w ciągu roku:
- Nie zgłasza szkód, dopóki nie zdarzy mu się szkoda o wartości przekraczającej ½
- Zgłasza pierwszą szkodę, która przekroczyła wartość ½, po czym zgłasza ewentualne następne szkody bez względu na to, jaka jest ich wartość.

Charakter ubezpieczenia jest przy tym taki, że decyzja o niezgłoszeniu danej szkody jest nieodwołalna – nie ma więc możliwości zgłoszenia danej szkody dopiero wtedy, kiedy zajdzie któraś z następnych szkód.

Oczekiwana wartość szkód zgłoszonych w ciągu roku z tego ubezpieczenia wynosi (z dobrym przybliżeniem):

(A) 0.75

(B) 0.77

(C) 0.79

(D) 0.82

(E) 0.84

Zadanie 10.
Pewien podmiot posiada wyjściowy majątek o wartości w, i narażony jest na stratę X. Strata X jest zmienną losową o rozkładzie dwupunktowym:
$\Pr(X = 1) = q$, $\Pr(X = 0) = 1 - q$

Rynek ubezpieczeniowy oferuje kontrakty ubezpieczeniowe wypłacające αX za szkodę w wysokości X dla dowolnych $\alpha \in (0,1]$, w zamian za składkę w wysokości $(1+\theta) \cdot q \cdot \alpha$.

Podmiot ten postępuje racjonalnie, a w swoich decyzjach kieruje się maksymalizacją oczekiwanej użyteczności, przy czym jego funkcja użyteczności jest postaci:
$u(x) = -\exp(-x)$.

Jeśli założymy, że $\theta = 25\%$, zaś $q = 20\%$, wtedy podmiot, o którym mowa, osiągnie maksimum oczekiwanej użyteczności wybierając kontrakt z pokryciem równym (wybierz najlepsze przybliżenie):

(A) $\alpha \approx 67\%$

(B) $\alpha \approx 71\%$

(C) $\alpha \approx 73\%$

(D) $\alpha \approx 76\%$

(E) $\alpha \approx 78\%$

Egzamin dla Aktuariuszy z 4 października 2010 r.

Matematyka ubezpieczeń majątkowych

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ : ....K L U C Z   O D P O W I E D Z I ....

~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	C	
2	D	
3	C	
4	E	
5	D	
6	A	
7	B	
8	C	
9	E	
10	B	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.
♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.