Zadanie 1

Zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej 1, a zmienna losowa Y rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej 2. Obie zmienne są niezależne. Oblicz $E(Y \mid X + Y = 3)$.

(A) 1,86

(B) 2,16

(C) 1,50

(D) 2,00

(E) 2,50

Zadanie 2

Niech $X_0, X_1, \ldots, X_n, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na przedziale (0,2). Niech zmienna losowa N oznacza numer pierwszej ze zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ o wartości większej niż X_0, zatem

$$N = \inf\{n : n \in \{1,2,\ldots\} \wedge X_n > X_0\}.$$

Wtedy EX_N jest równa

(A) 1

(B) $\frac{1}{2}$

(C) $\frac{3}{2}$

(D) $\frac{2}{3}$

(E) $\frac{5}{4}$

Zadanie 3

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu normalnego $N(m+\theta,1)$, a $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu normalnego $N(m-\theta,1)$. Wszystkie zmienne są niezależne. Parametry m i θ są nieznane. Weryfikujemy hipotezę $H_0: \theta = 0$ przy alternatywie $H_1: \theta = 0{,}5$ za pomocą testu opartego na ilorazie wiarogodności na poziomie istotności 0,05. Moc tego testu przy $n = 18$ jest równa

(A) 0,899

(B) 0,950

(C) 0,913

(D) 0,995

(E) 0,500

Zadanie 4

Zmienna losowa N ma rozkład Poissona z parametrem $\lambda > 0$. Rozważamy losową liczbę zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots, X_N$, przy czym zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_N$ są niezależne wzajemnie i niezależne od zmiennej losowej N. Każda ze zmiennych losowych X_i ma rozkład Pareto o gęstości

$$p_\theta(x) = \begin{cases} \dfrac{\theta}{x^{\theta+1}} & gdy \;\; x > 1 \\ 0 & gdy \;\; x \le 1 \end{cases},$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Obserwujemy tylko te spośród zmiennych $X_1, X_2, \ldots, X_N$, które są większe od znanej liczby w>1. Nie wiemy ile jest pozostałych zmiennych ani jakie są ich wartości. Niech $y_1, y_2, \ldots, y_k$ będą zaobserwowanymi wartościami. Na podstawie tych danych wyznaczyć estymatory największej wiarogodności parametrów θ i λ.

(A) $\hat{\theta} = \dfrac{k}{\sum_{i=1}^{k} \ln y_i - 2k \ln w}$ i $\hat{\lambda} = k(w^{\hat{\theta}} - 1)$

(B) $\hat{\theta} = \dfrac{k}{\sum_{i=1}^{k} \ln y_i - 2k \ln w}$ i $\hat{\lambda} = kw^{\hat{\theta}}$

(C) $\hat{\theta} = \dfrac{k}{\sum_{i=1}^{k} \ln y_i}$ i $\hat{\lambda} = kw^{\hat{\theta}}$

(D) $\hat{\theta} = \dfrac{k}{\sum_{i=1}^{k} \ln y_i - \ln w}$ i $\hat{\lambda} = k(w^{\hat{\theta}} - 1)$

(E) $\hat{\theta} = \dfrac{k}{\sum_{i=1}^{k} \ln y_i - k \ln w}$ i $\hat{\lambda} = kw^{\hat{\theta}}$

Zadanie 5

Łańcuch Markowa ma trzy stany: E_1, E_2, E_3, i macierz przejścia

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Niech X_n oznacza stan, w którym znajduje się łańcuch po dokonaniu n kroków, $n = 0,1,\dots$.
Funkcję f na zbiorze stanów określamy wzorem: $f(E_i) = i$ dla $i = 1,2,3$.
Niech $c = \lim_{n\to\infty} Cov[f(X_n), f(X_{n+1})]$. Granica c jest równa

(A) $-\frac{17}{64}$

(B) 0

(C) $-\frac{15}{64}$

(D) $-\frac{21}{64}$

(E) $-\frac{19}{64}$

Zadanie 6

Rozważmy zmienne losowe N, X, Y. Wiadomo, że rozkład warunkowy zmiennej losowej N, gdy $X = x$ i $Y = y$ jest rozkładem Poissona o wartości oczekiwanej x. Rozkład warunkowy zmiennej losowej X, gdy $Y = y$ jest rozkładem $Gamma(2, y)$, a rozkład zmiennej Y jest rozkładem $Gamma(4,3)$, gdzie rozkład $Gamma(\alpha, \beta)$ ma gęstość

$$p_{\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} \dfrac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} & gdy \;\; x > 0 \\ 0 & gdy \;\; x \le 0. \end{cases}$$

Wtedy wariancja $VarN$ jest równa

(A) 2

(B) 7

(C) 3

(D) 6

(E) 5

Zadanie 7

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_{13}$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie normalnym $N(m,1)$. Parametr m jest nieznany i jest realizacją zmiennej losowej o rozkładzie normalnym $N(1,3)$. Wyznaczamy estymator bayesowski parametru m przy funkcji straty LINEX danej wzorem

$$L(m,a) = e^{m-a} - (m-a) - 1,$$

gdzie a oznacza wartość estymatora.

Załóżmy, że w wyniku doświadczenia uzyskano próbkę losową taką, że $\sum_{i=1}^{13} X_i = 15.$

Wtedy estymator bayesowski przyjmuje wartość

(A) $\frac{27}{20}$

(B) $\frac{37}{32}$

(C) $\frac{18}{16}$

(D) $\frac{23}{20}$

(E) $\frac{19}{16}$

Zadanie 8

W pewnej populacji prawdopodobieństwo tego, że osobnik przeżyje pierwszy rok jest równe $(1-\theta^2)$. Jeżeli osobnik przeżył pierwszy rok, to prawdopodobieństwo warunkowe tego, że przeżyje następny rok jest równe $\frac{2\theta}{1+\theta}$.

W próbce losowej liczącej n osobników z tej populacji zanotowano:

- n_0 przypadków, kiedy osobnik nie przeżył pierwszego roku,
- n_1 przypadków, kiedy osobnik przeżył pierwszy rok, ale nie przeżył drugiego roku,
- n_2 przypadków, kiedy osobnik przeżył dwa lata.

Błąd średniokwadratowy estymatora największej wiarogodności parametru θ wyraża się wzorem:

(A) $\frac{\theta^2(1-\theta^2)}{2n}$

(B) $\frac{\theta(1-\theta)(1+2\theta^2)}{2n}$

(C) $\frac{\theta(1-\theta)}{2n}$

(D) $\frac{\theta^2(1-\theta^2)}{n}$

(E) $\frac{\theta(1-\theta)}{n}$

Zadanie 9

Mamy próbę prostą $((X_1,Y_1),(X_2,Y_2),\ldots,(X_{10},Y_{10}))$ z rozkładu normalnego dwuwymiarowego o nieznanych parametrach:

$$EX_i = EY_i = \mu\,, \quad VarX_i = VarY_i = \sigma^2\,, \qquad Cov(X_i,Y_i) = \sigma^2\rho\,.$$

Niech

$$Z_i = X_i + Y_i\,, \qquad R_i = X_i - Y_i\,, \qquad S_Z^{\ 2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{10}(Z_i-\overline{Z})^2\,, \qquad S_R^{\ 2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{10}(R_i-\overline{R})^2\,,$$

gdzie $\overline{Z}$ oraz $\overline{R}$ to odpowiednie średnie z próbki. Do testowania hipotezy $H_0 : \rho = \frac{1}{3}$ przeciwko alternatywie $H_1 : \rho \neq \frac{1}{3}$ możemy użyć testu o obszarze krytycznym postaci:

$$\frac{S_Z^{\ 2}}{S_R^{\ 2}} < k_1 \quad \text{lub} \quad \frac{S_Z^{\ 2}}{S_R^{\ 2}} > k_2\ ,$$

przy czym liczby k_1 i k_2 dobrane są tak, aby przy założeniu, że H_0 jest prawdziwa

$$P\left(\frac{S_Z^{\ 2}}{S_R^{\ 2}} < k_1\right) = P\left(\frac{S_z^{\ 2}}{S_R^{\ 2}} > k_2\right) = 0{,}05\,.$$

Liczby k_1 i k_2 są równe:

(A) $k_1 = 0{,}157$ i $k_2 = 1{,}589$

(B) $k_1 = 0{,}440$ i $k_2 = 4{,}451$

(C) $k_1 = 0{,}225$ i $k_2 = 2{,}271$

(D) $k_1 = 0{,}629$ i $k_2 = 6{,}358$

(E) $k_1 = 0{,}672$ i $k_2 = 5{,}956$

Zadanie 10

Z urny, w której jest 6 kul czarnych i 4 białe losujemy kolejno bez zwracania po jednej kuli tak długo, aż wylosujemy kulę czarną. Wartość oczekiwana liczby wylosowanych kul białych jest równa

(A) 1

(B) $\frac{4}{7}$

(C) $\frac{11}{7}$

(D) $\frac{4}{6}$

(E) $\frac{10}{6}$

Egzamin dla Aktuariuszy z 31 maja 2010 r.

Prawdopodobieństwo i Statystyka

Arkusz odpowiedzi* T

~~Imię i nazwisko~~ : ....K L U C Z O D P O W I E D Z I....................................
~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	A	
2	C	
3	C	
4	E	
5	D	
6	B	
7	E	
8	C	
9	D	
10	B	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.
♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.