

Zadanie 1.

Liczba szkód N z pojedynczej umowy w pewnym ubezpieczeniu jest zmienną losową o rozkładzie danym wzorem:

$$\Pr(N = 0) = p_0,$$

$$\Pr(N = k) = (1 - p_0)(1 - q)q^{k-1}, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

z nieznanymi parametrami $p_0 \in [0, 1)$, $q \in (0, 1)$.

Mamy próbkę N_1, N_2, \dots, N_{100} obserwacji ze 100 takich umów ubezpieczeniowych.

Zakładamy niezależność tych obserwacji.

Niech (\hat{p}_0, \hat{q}) oznaczają estymatory parametrów (p_0, q) uzyskane metodą największej wiarygodności. Jeśli wiadomo, że w próbce zaobserwowaliśmy łącznie 60 szkód z 15 umów (pozostałe 85 umów okazało się bezszkodowe), to wartość estymatora \hat{q} z dobrym przybliżeniem wynosi:

(A) $\frac{1}{4}$

(B) $\frac{3}{8}$

(C) $\frac{1}{2}$

(D) $\frac{5}{8}$

(E) $\frac{3}{4}$

Zadanie 2.

Rozważamy klasyczny model procesu nadwyżki $U(t) = u + ct - S_{N(t)}$, gdzie:

- u to nadwyżka początkowa
- ct to suma składek zgromadzonych do momentu t ,
- $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ to łączna wartość szkód zaszłych do momentu t ,
- proces liczący $N(t)$ oraz wartości szkód Y_1, Y_2, Y_3, \dots są niezależne, przy czym:
- $N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem intensywności λ ,
- wartości szkód Y_1, Y_2, Y_3, \dots mają taki sam rozkład
- $c = (1 + \theta) \cdot \lambda \cdot E(Y_1)$, $\theta > 0$

Wiadomo, że zmienna losowa:

$$L := \sup_{t>0} \{u - U(t)\}$$

daje się przedstawić jako zmienna o rozkładzie złożonym:

$$L = l_1 + l_2 + \dots + l_N, \quad (L = 0 \text{ gdy } N = 0),$$

gdzie l_1 jest zmienną określoną, gdy nadwyżka spadnie poniżej u , i równa jest wtedy:

$$l_1 = u - U(t_1),$$

gdzie t_1 to moment czasu, kiedy po raz pierwszy do takiego spadku doszło.

Wiadomo, że jeśli doszło do ruiny, wtedy istnieje taka liczba $K \in \{1, 2, \dots, N\}$ że:

$$l_1 + l_2 + \dots + l_K > u \quad \text{oraz} \quad l_1 + l_2 + \dots + l_{K-1} \leq u$$

Innymi słowy, K oznacza kolejny numer tego spadku, przy którym nastąpiła ruina, zaś liczba $(N - K)$ oznacza liczbę spadków, do których doszło już po zajściu ruiny.

Wzór na oczekiwaną liczbę spadków po zajściu ruiny:

$$E(N - K | L > u)$$

ma postać:

(A) $\frac{1 + \theta}{\theta}$

(B) $\frac{1}{\theta(1 + u)}$

(C) $\frac{1 + u}{\theta}$

(D) $\frac{1}{\theta}$

(E) bez informacji o rozkładzie zmiennej Y_1 (lub l_1) nie można wskazać żadnej z powyższych odpowiedzi

Zadanie 3.

Rozważamy klasyczny model procesu nadwyżki $U(t) = u + ct - S_{N(t)}$, gdzie:

- u to nadwyżka początkowa
- ct to suma składek zgromadzonych do momentu t ,
- $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ to łączna wartość szkód zaszłych do momentu t ,
- proces liczący $N(t)$ oraz wartości poszczególnych szkód Y_1, Y_2, Y_3, \dots są niezależne, przy czym:
- $N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem intensywności λ ,
- wartości poszczególnych szkód Y_1, Y_2, Y_3, \dots mają ten sam rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej równej β^{-1}
- $c = (1 + \theta) \cdot \lambda$, $\theta > 0$

Wiadomo, że zmienna losowa:

$$L := \sup_{t>0} \{u - U(t)\}$$

daje się przedstawić jako zmienna o rozkładzie złożonym:

$$L = l_1 + l_2 + \dots + l_N, \quad (L = 0 \text{ gdy } N = 0),$$

gdzie l_1 jest zmienną określoną, gdy nadwyżka spadnie poniżej u , i równa jest wtedy:

$$l_1 = u - U(t_1),$$

gdzie t_1 to moment czasu, kiedy po raz pierwszy do takiego spadku doszło.

Prawdopodobieństwo warunkowe zajścia ruiny w pierwszym momencie, w którym doszło do spadku nadwyżki początkowej, pod warunkiem, że do ruiny doszło, a więc:

$$\Pr(N > 0, l_1 > u | L > u)$$

Dane jest wzorem:

(A) $\exp\left(-\frac{\beta u}{1 + \theta}\right)$

(B) $\exp\left(-\frac{\beta \theta u}{1 + \theta}\right)$

(C) $\exp(-\beta u)$

(D) $\frac{\exp(-\beta u)}{1 + \theta}$

(E) $\frac{\theta \exp(-\beta u)}{1 + \theta}$

Zadanie 4.

Przyjmijmy dla pewnego jednorodnego portfela ubezpieczeń następujące oznaczenia:

- $N_{t,j}$ to liczba szkód, które zaszły w roku t i zostały zgłoszone w roku $(t+j)$
- n_t to liczba jednostek ryzyka (*exposure*) w roku t .

Zakładamy, że $N_{t,j}$ jest dla każdej pary (t, j) zmienną losową o rozkładzie Poissona z wartością oczekiwaną równą $n_t \lambda_t r_j$, gdzie λ_t to oczekiwana liczba szkód na jednostkę ryzyka w roku t , zaś współczynniki udziałowe r_0, r_1, \dots spełniają:

- $r_j \geq 0$, $j = 0, 1, 2, \dots$, oraz $\sum_{j=0}^{\infty} r_j = 1$.

Zakładamy także niezależność wszystkich zmiennych $N_{t,j}$, dla wszystkich całkowitych t oraz j .

Zaobserwowaliśmy w ostatnich 3 latach następujące realizacje zmiennej $N_{t,j}$:

$t \backslash j$	0	1	2
0	49	41	10
1	61	47	
2	80		

Wiemy także, że liczby jednostek ryzyka w tych latach wyniosły:

- $n_0 = 550$, $n_1 = 600$, $n_2 = 700$

Jeśli przyjmujemy dodatkowe założenia, że:

- $r_0 + r_1 + r_2 = 1$, oraz $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2$,

i przy tych założeniach wyestymujemy parametry $(r_0, r_1, r_2, \lambda_0)$ metodą największej wiarygodności, to estymator parametru λ_0 wyniesie (z dobrym przybliżeniem):

- (A) 0.194
- (B) 0.197
- (C) 0.200
- (D) 0.203
- (E) 0.207

Wskazówka: możesz ułatwić sobie zadanie estymując bezpośrednio MNW parametry $c_0 := \lambda_0 r_0$, $c_1 := \lambda_0 r_1$ oraz $c_2 := \lambda_0 r_2$, i otrzymując estymator MNW parametru λ_0 jako sumę uzyskanych ocen.

Zadanie 5.

Wartość oczekiwana szkód X z ryzyka jest funkcją parametru Λ który charakteryzuje podmiot na to ryzyko narażony, i wynosi $E(X|\Lambda) = 3\Lambda$. Rozkład parametru Λ w populacji ryzyk dany jest na półosi dodatniej gęstością:

- $f_{\Lambda}(x) = 100x \exp(-10x)$

Ubezpieczyciel nie odróżnia ryzyk lepszych od gorszych, ustalić więc musi składkę równą dla wszystkich. Musi się jednak liczyć ze skutkami negatywnej selekcji. Oznaczmy przez:

- U zmienną losową przyjmującą wartość 1 jeśli podmiot nabędzie ubezpieczenie, zaś 0 jeśli nie nabędzie;
- Π składkę zaoferowaną przez ubezpieczyciela.

Założmy, że negatywna selekcja przejawia się w tym, że:

- $\Pr(U = 1|\Lambda = \lambda) = 1 - \exp\left(-\frac{2\lambda}{\Pi}\right)$ dla $\lambda > 0$

Jeśli ubezpieczyciel ustalił składkę na poziomie $\Pi = 1$, to oczekiwana wartość szkód dla przeciętnego podmiotu (spośród tych podmiotów które zawrą ubezpieczenie), a więc:

$$E(X|U = 1),$$

wyniesie z dobrym przybliżeniem:

- (A) 0.868
- (B) 0.846
- (C) 0.827
- (D) 0.805
- (E) 0.783

Zadanie 6.

W modelu nadwyżki ubezpieczyciela z czasem dyskretnym nadwyżka początkowa wynosi 3.5, składka roczna wynosi 2, a łączne wartości szkód w kolejnych latach W_1, W_2, W_3, \dots są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie danym wzorem:

$$\Pr(W_1 = k) = 2\left(\frac{1}{3}\right)^k, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Prawdopodobieństwo ruiny wynosi:

- (A) $\frac{1}{16}$
- (B) $\frac{1}{16\sqrt{2}}$
- (C) $\frac{1}{32}$
- (D) $\frac{1}{32\sqrt{2}}$
- (E) $\frac{1}{64}$

Zadanie 7.

Niech $X_{t,j}$ oznacza pomiar zmiennej w miesiącu j roku t , $t = 1, 2, \dots, 10$, $j = 1, 2, \dots, 12$.

Zakładamy, że $X_{t,j}$ zawiera składnik wahań sezonowych oraz wahań przypadkowych.

Dokładniej, wahania przypadkowe spełniają założenia:

- $E(X_{t,j} | \mu_j) = \mu_j$
- $\text{var}(X_{t,j} | \mu_j) = s^2$,
- $\text{cov}(X_{t,j}, X_{s,k} | \mu_j, \mu_k) = 0$, jeśli ($j \neq k$ lub $t \neq s$)

zaś wahania sezonowe spełniają założenia:

- $E(\mu_j) = \mu$
- $\text{var}(\mu_j) = a^2$
- $\text{cov}(\mu_j, \mu_k) = 0$, jeśli $j \neq k$

W celu estymacji parametrów sezonowych μ_j posługujemy się współczynnikiem:

$$1 - z := \frac{\frac{1}{10} s^2}{a^2 + \frac{1}{10} s^2}.$$

Nie znamy parametrów a^2 ani s^2 . Estymujemy $(1 - z)$ korzystając z dekompozycji sumy kwadratów odchyleń na wahania wewnątrz-sezonowe i między-sezonowe:

$$1 - \hat{z} := \text{const} \cdot \frac{\sum_{t=1}^{10} \sum_{j=1}^{12} (X_{t,j} - \bar{X}_j)^2}{\sum_{j=1}^{12} (\bar{X}_j - \bar{X})^2}$$

gdzie \bar{X} oraz \bar{X}_j oznaczają odpowiednio średnią ogólną (ze 120 obserwacji) i średnią z obserwacji dotyczących j -tego miesiąca.

Jeśli estymator współczynnika $(1 - z)$ miałby być ilorazem nieobciążonych

estymatorów parametrów $\frac{1}{10} s^2$ oraz $\left(a^2 + \frac{1}{10} s^2\right)$, to stała const wynosi:

(A) $\text{const} = \frac{1}{9 \cdot 10}$

(B) $\text{const} = \frac{11}{9 \cdot 10 \cdot 12}$

(C) $\text{const} = \frac{1}{10 \cdot 10}$

(D) $\text{const} = \frac{12}{9 \cdot 10 \cdot 11}$

(E) $\text{const} = \frac{1}{10 \cdot 11}$

Zadanie 8.

Pewne ryzyko generuje szkody zgodnie z procesem Poissona z parametrem intensywności λ . O parametrze λ zakładamy, że jest on realizacją zmiennej losowej Λ o rozkładzie Gamma $(2, 5)$. Niech $N(t)$ oznacza liczbę szkód w czasie od 0 do t , zaś $T(t)$ - chwilę wystąpienia pierwszej szkody po momencie t .

$E(T(4) - 4 | N(4) = 2)$ wynosi:

(A) 3

(B) $\frac{9}{4}$

(C) $\frac{7}{5}$

(D) 2

(E) $\frac{9}{5}$

Zadanie 9.

W pewnym ubezpieczeniu może dojść co najwyżej do jednej szkody w ciągu roku. Wartość szkody (o ile do niej dojdzie) ma rozkład jednostajny na odcinku $(0,1)$.

Ubezpieczony, któremu (niezależnie w kolejnych latach) zdarzają się szkody z prawdopodobieństwem q , wędruje po klasach systemu bonus malus, w którym:

- Po roku ze zgłoszeniem szkody przenosi się do klasy 1
- Po roku bez zgłoszenia przenosi się do klasy 2 (jeśli był w klasie 1) lub do klasy 3 (jeśli był w klasie 2 lub 3).

Gdyby zgłaszał wszystkie szkody które mu się zdarzają, macierz prawdopodobieństw przejść wyglądałaby następująco:

$$\begin{bmatrix} q & p & 0 \\ q & 0 & p \\ q & 0 & p \end{bmatrix}.$$

Niech r_1 , r_2 oraz r_3 oznaczają składkę płaconą przez ubezpieczonego przesuniętego właśnie do klasy 1, 2 lub 3 odpowiednio.

Ponieważ $r_1 > r_2 > r_3$, nasz ubezpieczony postanawia zastosować następującą strategię:

- Zgłasza szkodę, o ile jej wartość przekracza d
- Szkody nie przekraczające d pokrywa we własnym zakresie;

przy czym wartość d jest ta sama bez względu na klasę, w której aktualnie przebywa.

Ubezpieczony tak dobiera parametr d , aby wartość oczekiwana całkowitego kosztu (płaconej składki i kosztu samodzielnie pokrywanych szkód) była jak najmniejsza. Bierze przy tym pod uwagę oczekiwany całkowity koszt w pojedynczym, odległym okresie czasu (na tyle, żeby oczekiwaną składkę liczyć w oparciu o graniczny rozkład na przestrzeni klas).

Jeśli składki wynoszą odpowiednio: $r_1 = 0.1$, $r_2 = 0.075$, $r_3 = 0.05$, zaś parametr charakteryzujący naszego ubezpieczonego wynosi $q = 0.1$, to optymalna wartość parametru d wynosi (z dobrym przybliżeniem):

- (A) 0.05
- (B) 0.055
- (C) 0.06
- (D) 0.065
- (E) 0.07

Zadanie 10.

Pewien podmiot posiada wyjściowy majątek o wartości w , i narażony jest na stratę X . Strata X jest zmienną losową o złożonym rozkładzie Poissona:

$$X = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_N$$

- z oczekiwaną liczbą szkód równą $E(N) = \lambda$, oraz
- z wartością pojedynczej szkody o rozkładzie wykładniczym i wartości oczekiwanej równej $E(Y_1) = \beta^{-1}$.

Rynek ubezpieczeniowy oferuje kontrakty z pokryciem nadwyżki każdej szkody ponad kwotę d , a więc pokrywa:

$$X_d = (Y_1 - d)_+ + (Y_2 - d)_+ + \dots + (Y_N - d)_+$$

W zamian za składkę w wysokości: $(1 + \theta)E(X_d)$, gdzie parametr θ ma wartość mniejszą od 100%.

Podmiot ten postępuje racjonalnie, a w swoich decyzjach kieruje się maksymalizacją oczekiwanej użyteczności, przy czym jego funkcja użyteczności jest postaci:

$$u(x) = -\exp\left(-\frac{\beta}{2}x\right).$$

Maksimum oczekiwanej użyteczności podmiot ten osiągnie wybierając kontrakt z udziałem własnym w każdej szkodzie d równym:

(A) $\frac{2\lambda \ln(1 + \theta)}{\beta}$

(B) $\frac{2 \ln(1 + \theta)}{\beta}$

(C) $\frac{\ln(1 + \theta)}{\beta}$

(D) $\frac{\ln(1 + \theta)}{2\beta}$

(E) $\frac{\lambda \ln(1 + \theta)}{2\beta}$

Egzamin dla Aktuariuszy z 31 maja 2010 r.**Matematyka ubezpieczeń majątkowych****Arkusz odpowiedzi***

Imię i nazwisko : KLUCZ ODPOWIEDZI.....

Pesel

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja ♦
1	E	
2	D	
3	A	
4	D	
5	C	
6	C	
7	B	
8	A	
9	E	
10	B	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.