

**Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy**

**LIII Egzamin dla Aktuariuszy z 31 maja 2010 r.**

**Część I**

**Matematyka finansowa**

**WERSJA TESTU A**

**Imię i nazwisko osoby egzaminowanej:**

.....

Czas egzaminu: 100 minut

1. Zakład ubezpieczeń dysponuje w chwili obecnej ( $t=0$ ) pakietem obligacji rządowych A o terminie zapadalności 25 lat, łącznym nominale 1 mln PLN i kuponie 8% w skali roku. Zarządzający portfelem obligacji chce zabezpieczyć ekspozycję przeciw wahaniom stopy procentowej w krótkim okresie czasu, w tym celu rozważa przyjęcie krótkiej pozycji w kontraktach *futures* o krótkim okresie wygaśnięcia, każdy wystawiony na obligacje rządową B o nominale 100 tys. PLN, kuponie rocznym 6% oraz okresie zapadalności 15 lat. Zarządzający zakłada ponadto, że stopy dochodowości obligacji mierzone na chwilę obecną są odpowiednio 10% dla każdej obligacji z pakietu A oraz 9% dla obligacji B oraz że wahania obu tych stóp są takie same, co do wartości wyrażonych w punktach procentowych. Cena terminowa kontraktu *futures* jest ustalona jako obecna (na moment  $t=0$ ) cena obligacji B. Liczba kontraktów *futures* (każdy wystawiony na jedną obligację B), w których krótka pozycja najlepiej osłoni pakiet obligacji A przed krótkoterminowymi i nieznacznymi wahaniami stopy procentowej wynosi (zakładamy model dyskretny oraz rynek doskonały bez kosztów transakcji i z idealną podzielnością aktywów):

- A) 9.54
- B) 10.32
- C) 10.62
- D) 10.72
- E) 11.58

- 
2. Renta wieczysta (*perpetuity*) wypłaca raty na końcu każdego roku. W latach nieparzystych pierwsza rata wynosi 2, a każda następna jest o 3 większa od poprzedniej, natomiast w latach parzystych pierwsza rata wynosi 3, a każda następna jest o 2 większa od poprzedniej.

Ile wynosi obecna wartość tej renty, jeżeli stopa procentowa jest równa 5%.

Podaj najbliższą wartość.

- A) 520
- B) 525
- C) 530
- D) 535
- E) 540

3. Na rynku dostępna jest akcja spółki A, której bieżąca cena wynosi  $S_0 = 250$  PLN. Przyjmujemy dwa scenariusze rozwoju rynku finansowego:

- scenariusz 1: po roku cena akcji spółki A wzrośnie o 15%
- scenariusz 2: po roku cena akcji spółki A spadnie o 9%.

Inwestor przyjmuje krótką pozycję „stelaza” (*short straddle spread*) polegającą na wystawieniu europejskiej opcji kupna i europejskiej opcji sprzedaży na akcję spółki A o tej samej cenie wykonania równej  $S_0$  i okresie wykonania równym 1 rok. W celu osłony pozycji inwestor stosuje strategię zabezpieczającą polegającą na stworzeniu w chwili  $t=0$  portfela, który replikuje w chwili wykonania wypłatę z pozycji w opcjach.

Portfel replikujący składa się z:

- akcji spółki A w ilości  $\Delta_0$  (zakładamy idealną podzielność aktywów)
- instrumentu wolnego od ryzyka o wartości w chwili  $t=0$  równej  $B_0$ .

Instrument wolny od ryzyka zarabia w skali roku stopę 5.6%. Zakładamy, że akcja spółki A nie wypłaca dywidendy. Zakładamy również brak kosztów transakcji wynikających z przyjęcia pozycji w opcjach.

Wartość  $B_0$  instrumentu wolnego od ryzyka wynosi (podaj najbliższą wartość):

- A) – 62.50 PLN (krótka pozycja: inwestor pożyczka instrument)
- B) – 34.38 PLN (krótka pozycja: inwestor pożyczka instrument)
- C) – 32.55 PLN (krótka pozycja: inwestor pożyczka instrument)
- D) 32.55 PLN (długa pozycja: inwestor nabywa instrument)
- E) 34.38 PLN (długa pozycja: inwestor nabywa instrument)

*Wskazówka:*

*Mówimy, że portfel replikuje wypłatę z opcji, jeśli jego wartość jest równa wypłacie z opcji w dowolnym momencie i dla dowolnego scenariusza rozwoju rynku finansowego. Przyjmujemy założenia rynku doskonałego i zupełnego.*

4. Kredyt o wartości 100 000 będzie spłacany równymi ratami płatnymi na koniec każdego miesiąca, przez okres 10 lat. Oprocentowanie kredytu wynosi  $i^{(4)} = 8\%$  przy kwartalnej kapitalizacji odsetek.

Niech  $n_1$  oznacza numer raty, w której pierwszy raz spłata kapitału będzie większa od spłaty odsetek, a  $n_2$  numer raty, w której pierwszy raz spłata kapitału będzie co najmniej dwukrotnie większa od spłaty odsetek. Oblicz iloraz  $n_2/n_1$ . Podaj najbliższą wartość.

- A) 3.70
- B) 3.75
- C) 3.80
- D) 3.85
- E) 3.90

5. Niech  $S(t)$  będzie ceną spot akcji w chwili (roku)  $t$ . Akcja ta nie wypłaca dywidendy w najbliższym roku. Wyznaczyć cenę w chwili 0 kontraktu, który po roku daje posiadaczowi wypłatę  $S(1)^2/S(0)$ .

Zakładamy, że cena akcji opisana jest przez proces:

$$S(t) = A(t) \cdot \exp(\sigma\sqrt{t}Z), \quad t > 0,$$

gdzie  $Z \sim N(0,1)$ , a  $A(t) > 0$  jest pewną funkcją rzeczywistą oraz, że rynek nie dopuszcza arbitrażu. Ciągła stopa wolna od ryzyka wynosi 6% w skali roku, a zmienność ceny akcji  $\sigma = 30\%$ . Cena opisanego kontraktu wynosi (podać najbliższą odpowiedź):

- A)  $S(0) \cdot \exp(0.09)$
- B)  $S(0) \cdot \exp(0.15)$
- C)  $S(0) \cdot \exp(0.21)$
- D)  $S(0)$
- E) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

6. W dniu 31 grudnia 2010 Inwestor kupuje na rynku pierwotnym 4-letnią obligacja po cenie 1000 PLN. Nominał obligacji wynosi 1000 PLN, zaś stałe kupony płatne są na koniec każdego roku. Strukturę czasową stóp procentowych na dzień 31 grudnia 2010 opisuje krzywa stóp *spot* (krzywa zero kuponowa):

$$s_n = \frac{1}{100} \cdot \frac{14 \cdot n - 10}{3 \cdot n - 1}, n \geq 1,$$

gdzie  $s_n$  oznacza  $n$ -letnią stopę *spot*. Stopa kuponu tej obligacji wynosi (podać najbliższą odpowiedź):

- A) 3.4%
- B) 3.6%
- C) 3.9%
- D) 4.1%
- E) 4.7%

7. Inwestycja emerytalna rozpoczynająca się z początkiem roku polega na inwestowaniu w funduszu inwestycyjnym części wynagrodzenia. Wpłaty dokonywane będą na końcu każdego miesiąca. Celem inwestycji jest zgromadzenie na koniec 20 roku oszczędzania środków, w wysokości wystarczającej do wypłaty 5 letniej renty pewnej płatnej z dołu, w wysokości 3000 PLN miesięcznie.

Stopa zwrotu w funduszu inwestycyjnym wynosi 0.6% miesięcznie w okresie pierwszych 10 lat oszczędzania i 0.5% miesięcznie w okresie następnych 10 lat. W okresie pobierania renty miesięczna stopa zwrotu będzie wynosić 0.4%.

Wynagrodzenie osoby inwestującej na końcu pierwszego miesiąca okresu oszczędzania wynosi 4000 PLN i będzie rosło o 10 PLN miesięcznie w pierwszym 10 letnim okresie inwestowania, natomiast w drugim 10 letnim okresie wynagrodzenie będzie wzrastało miesięcznie o 0.2%.

Osoba inwestująca będzie przekazywać do funduszu na końcu każdego miesiąca 6% swojego wynagrodzenia przez pierwsze 10 lat inwestowania oraz X% wynagrodzenia przez pozostałe 10 lat.

Ile wynosi X (podaj najbliższą wartość)?

- A) 6.8
- B) 7.1
- C) 7.4
- D) 7.7
- E) 8.0

- 
8. Kredyt oprocentowany przy nominalnej rocznej stopie procentowej  $i^{(4)}$ , naliczanej kwartalnie, miał być spłacany przez okres 4 lat za pomocą płatności dokonywanych na końcu każdego kwartału, przy czym płatności dokonywane na końcu kwartału parzystego miały być 3.5 razy większe od płatności dokonywanych na końcu kwartału nieparzystego. Po zapłaceniu połowy rat wydłużono pozostały okres spłaty do 4 lat (bez zmiany pozostałych warunków), w wyniku czego wysokość każdej raty zmniejszyła się o 45%. Wyznacz stopę procentową  $i^{(4)}$ .  
Podaj najbliższą wartość.

- A) 9.0%
- B) 9.5%
- C) 10.0%
- D) 10.5%
- E) 11.0%

9. Renta wieczysta wypłaca na koniec roku kwotę  $a_k$  określoną wzorem

$$a_k = \begin{cases} k \cdot (k - 1) & \text{dla } k \text{ parzystych,} \\ \frac{k}{k + 1} & \text{dla } k \text{ nieparzystych,} \end{cases}$$

dla  $k = 1, 2, 3, \dots$ . Wyznacz duration (klasyczne, Macaulay'a) tej renty (podaj najbliższą wartość). Do dyskontowania przyjmij efektywną roczną stopę procentową  $i = 10\%$ .

- A) 31
- B) 32
- C) 33
- D) 34
- E) 35

10. Wiadomo, że dla pewnego ustalonego rzeczywistego  $N > 0$  zachodzi  $\bar{a}_{\overline{N}|} = N - 4$ . Wyznacz

$$\frac{\left(\sup_{k \geq 0} (\bar{I}\bar{a})_{\overline{k}|}\right) \left(\int_0^N \bar{a}_{\overline{t}|} dt\right)}{1 - \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\int_0^k (\bar{I}\bar{a})_{\overline{t}|} dt}},$$

jeżeli intensywność ciągłego oprocentowania wynosi  $\delta = 10\%$ . Odpowiedź (podaj najbliższą wartość):

- A) 4000
- B) 4100
- C) 4200
- D) 4300
- E) 4400

**Egzamin dla Aktuariuszy z 31 maja 2010 r.****Matematyka finansowa****Arkusz odpowiedzi\***

Imię i nazwisko: .....

Pesel: .....

OZNACZENIE WERSJI TESTU .....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	E	
2	E	
3	D	
4	B	
5	B	
6	D	
7	D	
8	C	
9	B	
10	A	

---

\* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.