

Zadanie 1.

Liczba szkód N z pojedynczej umowy w pewnym ubezpieczeniu jest zmienną losową o rozkładzie danym wzorem:

$$\Pr(N = 0) = p,$$

$$\Pr(N = k) = \frac{(1-p) \cdot \lambda^k}{(e^\lambda - 1) \cdot k!}, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

z nieznanymi parametrami $p \in [0, 1)$, $\lambda > 0$.

Mamy próbkę $N_1, N_2, \dots, N_{1000}$ obserwacji z 1000 takich umów ubezpieczeniowych.

Zakładamy niezależność tych obserwacji.

Niech $(\hat{p}, \hat{\lambda})$ oznaczają estymatory parametrów (p, λ) uzyskane metodą największej wiarygodności. Jeśli wiadomo, że w próbce zaobserwowaliśmy łącznie 463 szkody, przy czym wszystkie te szkody powstały z 400 umów (pozostałe 600 okazało się bezszkodowe), to wartość estymatora $\hat{\lambda}$ z dobrym przybliżeniem wynosi:

- (A) 0.511
- (B) 0.300
- (C) 0.364
- (D) 0.405
- (E) 0.463

Zadanie 2.

Rozważamy klasyczny model procesu nadwyżki $U(t) = u + ct - S_{N(t)}$, gdzie:

- u to nadwyżka początkowa
- ct to suma składek zgromadzonych do momentu t ,
- $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ to łączna wartość szkód zaszłych do momentu t ,
- proces liczący $N(t)$ oraz wartości poszczególnych szkód Y_1, Y_2, Y_3, \dots są niezależne, przy czym:
- $N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem intensywności λ ,
- wartości poszczególnych szkód Y_1, Y_2, Y_3, \dots mają ten sam rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej równej 1
- $c = (1 + \theta) \cdot \lambda \cdot E(Y_1)$, $\theta > 0$

Wiadomo, że zmienna losowa:

$$L := \sup_{t > 0} \{u - U(t)\}$$

daje się przedstawić jako zmienną o rozkładzie złożonym:

$$L = l_1 + l_2 + \dots + l_N, \quad (L = 0 \text{ gdy } N = 0),$$

gdzie składnik l_1 jest zmienną określoną w przypadku, gdy nadwyżka spadnie poniżej u , i równy jest wtedy:

- $l_1 = u - U(t_1)$, gdzie t_1 jest tym momentem czasu, kiedy po raz pierwszy do takiego spadku doszło.

Warunkowa wartość oczekiwana liczby takich spadków, pod warunkiem że nastąpiła ruina:

$$E(N|L > u)$$

Dana jest wzorem:

$$(A) \quad \frac{1 + \theta}{\theta} + u$$

$$(B) \quad \frac{1 + \theta}{\theta} + \frac{u\theta}{1 + \theta}$$

$$(C) \quad \frac{1 + \theta}{\theta} + \frac{(1 + \theta)u}{2 + \theta}$$

$$(D) \quad \frac{1 + \theta}{\theta} + \frac{(1 + \theta)u}{1 + 2\theta}$$

$$(E) \quad \frac{1 + \theta}{\theta} + \frac{u}{1 + \theta}$$

Zadanie 3.

Rozważamy klasyczny model procesu nadwyżki $U(t) = u + ct - S_{N(t)}$, gdzie:

- u to nadwyżka początkowa
- ct to suma składek zgromadzonych do momentu t ,
- $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ to łączna wartość szkód zaszłych do momentu t ,
- proces liczący $N(t)$ oraz wartości poszczególnych szkód Y_1, Y_2, Y_3, \dots są niezależne, przy czym:
- $N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem intensywności λ ,
- wartości poszczególnych szkód Y_1, Y_2, Y_3, \dots mają ten sam rozkład Pareto o dystrybuancie:

$$F_Y(y) = 1 - (1 + y)^{-\alpha} \text{ z parametrem } \alpha = \frac{7}{2}$$

- $c = (1 + \theta) \cdot \lambda \cdot E(Y_1)$, $\theta > 0$

Rozważmy zmienną losową:

- $L := \sup_{t>0} \{u - U(t)\}$

Kwadrat współczynnika zmienności tej zmiennej, a więc:

$$\frac{\text{var}(L)}{\{E(L)\}^2}$$

wynosi:

- (A) 3θ
- (B) $1 + 3\theta$
- (C) 6θ
- (D) $1 + 6\theta$
- (E) θ

Zadanie 4.

Liczby szkód N_1, \dots, N_t, N_{t+1} w kolejnych latach są, dla ustalonej wartości parametru $\Lambda = \lambda$, niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie Poissona o wartości oczekiwanej λ . Niech $N = N_1 + \dots + N_t$. Parametr ryzyka Λ jest zmienną losową o rozkładzie gamma o gęstości:

$$f_{\Lambda}(x) = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} \cdot \exp(-\beta x), \quad \alpha, \beta > 0.$$

Jeśli przyjmujemy wartości parametrów:

$$\alpha = 2,$$

$$\beta = 10,$$

$$t = 10,$$

Wtedy warunek konieczny i wystarczający na to, aby zachodziła nierówność:

- $\text{var}(N_{t+1} | N_1, \dots, N_t) > \text{var}(N_{t+1})$

jest postaci:

(A) $N > 0$

(B) $N > 1$

(C) $N > 2$

(D) $N > 3$

(E) dla żadnej dopuszczalnej wartości N nierówność powyższa nie zachodzi

Zadanie 5.

W pewnym systemie bonus-malus mamy 4 klasy ponumerowane liczbami 1,2,3,4, oraz odpowiadające im poziomy składki: Π , $\frac{8}{9}\Pi$, $(\frac{8}{9})^2\Pi$, $(\frac{8}{9})^3\Pi$.

Zasady ruchu pomiędzy klasami są następujące:

- Kierowca przesuwa się do klasy 1 po każdym roku, w którym zgłosił jedną lub więcej szkód,
- Po roku bez zgłoszeń szkód w klasie i kierowca przesuwa się do klasy o numerze $\min\{i + 1, 4\}$.

Niech liczby szkód zgłaszanych przez pewnego kierowcę w kolejnych latach będą niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że prawdopodobieństwo zgłoszenia zera szkód w ciągu roku wynosi 0,9. Wartość oczekiwana składki płaconej przez tego kierowcę w piątym roku ubezpieczenia równa jest:

- (A) 0.756Π
- (B) 0.676Π
- (C) 0.594Π
- (D) 0.512Π
- (E) zależy, w której klasie kierowca znalazł się w pierwszym roku

Zadanie 6.

W modelu nadwyżki ubezpieczyciela z czasem dyskretnym nadwyżka początkowa wynosi 1.5, składka roczna wynosi 1, a łączna wartość szkód w każdym roku z prawdopodobieństwem dwie trzecie wynosi 0 i z prawdopodobieństwem jedna trzecia wynosi 2 (niezależnie od wartości szkód w innych latach).

Prawdopodobieństwo ruiny wynosi:

(A) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$

(B) $\frac{1}{4}$

(C) $\frac{1}{4\sqrt{2}}$

(D) $\frac{1}{8}$

(E) $\frac{1}{8\sqrt{2}}$

Zadanie 7.

Niech w pewnym jednorodnym portfelu ryzyk X_t oznacza łączną wartość szkód, n_t odpowiadającą jej liczbę jednostek ryzyka, a μ_t oczekiwaną wartość szkód na jednostkę ryzyka w roku t .

Fluktuacje łącznej wartości szkód w roku t i roku następnym opisują założenia:

$$E(X_t | \mu_{t+1}, \mu_t) = \mu_t \cdot n_t$$

$$E(X_{t+1} | \mu_{t+1}, \mu_t) = \mu_{t+1} \cdot n_{t+1}$$

$$\text{var}(X_t | \mu_{t+1}, \mu_t) = s^2 \cdot n_t$$

$$\text{var}(X_{t+1} | \mu_{t+1}, \mu_t) = s^2 \cdot n_{t+1}$$

$$\text{cov}(X_{t+1}, X_t | \mu_{t+1}, \mu_t) = 0$$

Natomiast zmiany μ_t w kolejnych latach opisują założenia:

$$E(\mu_{t+1} | \mu_t) = \mu_t$$

$$\text{var}(\mu_{t+1} | \mu_t) = a$$

$$\text{cov}(\mu_{t+1}, X_t | \mu_t) = 0$$

Jeśli $a = 1$, $s^2 = 6$, $n_{t+1} = 40$, $n_t = 60$, to wartość oczekiwana

$$E\left(\left(\frac{X_t}{n_t} - \frac{X_{t+1}}{n_{t+1}}\right)^2\right) \text{ wynosi:}$$

- (A) 2.25
- (B) 2.24
- (C) 1.74
- (D) 1.25
- (E) 1.24

Zadanie 8.

Szkody, do których doszło przed momentem czasu $t = 0$ u pewnego ubezpieczyciela charakteryzuje para zmiennych losowych (T, D) oznaczających odpowiednio:

- T – czas zajścia szkody,
- D – odstęp czasu pomiędzy zajściem szkody a jej likwidacją.

Jednostką pomiaru obu zmiennych jest 1 rok.

Założmy, że:

- zmienne T i D są niezależne,
- ich rozkłady prawdopodobieństwa dane są gęstościami, określonymi odpowiednio na półosi ujemnej:

- $f_T(t) = r \cdot \exp(rt)$ dla $t \in (-\infty, 0)$, gdzie $r > 0$,

i dodatniej:

- $f_D(x) = \beta \cdot \exp(-\beta x)$ dla $x \in (0, \infty)$, gdzie $\beta > 0$.

Stosunek oczekiwanej liczby szkód zaszłych przed dniem bilansowym do oczekiwanej liczby szkód zaszłych w ciągu roku poprzedzającego dzień bilansowy, który przy przyjętych oznaczeniach wyraża się w prosty sposób jako:

- $\frac{\Pr(T + D > 0)}{\Pr(T \in (-1, 0))}$

wynosi:

(A) $\frac{1 - \exp(-r - \beta)}{r + \beta}$

(B) $\frac{1}{r + \beta}$

(C) $\frac{r(1 - \exp(-\beta))}{(r + \beta)(1 - \exp(-r))}$

(D) $\frac{r(1 - \exp(-r - \beta))}{(r + \beta)(1 - \exp(-r))}$

(E) $\frac{r}{(r + \beta)(1 - \exp(-r))}$

Zadanie 9.

Ubezpieczony generuje szkody zgodnie z procesem Poisson o parametrze intensywności λ rocznie, i wszystkie szkody, które mu się przydarzą, zgłasza ubezpieczycielowi.

Składka Π_t płacona przez ubezpieczonego w roku t wyznaczana jest następująco:

- wynosi M dla $t = 1$, a więc w pierwszym roku ubezpieczenia, zaś dla $t = 2, 3, 4, \dots$:
- wynosi $\Pi_t = m + w(\Pi_{t-1} - m)$, jeśli rok $t - 1$ był bezszkodowy,
- wynosi $\Pi_t = M + W(\Pi_{t-1} - M)$, jeśli w roku $t - 1$ zdarzyła się co najmniej jedna szkoda.

Jeśli przyjmujemy wartości liczbowe parametrów formuły składki na poziomie:

- $M = 100$, $W = 0.4$
- $m = 20$, $w = 0.8$,

to dla ubezpieczonego o wartości parametru λ równej $\ln(10/9)$ oczekiwana składka w długim okresie:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(\Pi_t)$$

wynosi:

- (A) 36
- (B) 37.4
- (C) 40
- (D) 42.4
- (E) 44

Zadanie 10.

Pewien podmiot posiada wyjściowy majątek o wartości w , i narażony jest na stratę w wysokości X . Podmiot ten postępuje racjonalnie, a w swoich decyzjach kieruje się maksymalizacją oczekiwanej użyteczności. Jego funkcja użyteczności jest postaci:

$$u(x) = -\exp(-x).$$

Strata X ma rozkład jednostajny na odcinku $(0, 1)$.

Rynek ubezpieczeniowy oferuje kontrakty z odszkodowaniem za szkodę x zdefiniowanym dla każdego $x \in (0, 1)$ jako:

$$I_d(x) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } x < d \\ x - d & \text{gdy } x \geq d \end{cases}$$

w zamian za cenę równą $(1 + \theta) \cdot E\{I_d(X)\}$, gdzie dodatni parametr θ jest taki sam dla wszystkich $d \in [0, 1]$.

Podmiot, o którym mowa, dokonuje wyboru parametru kontraktu $d \in [0, 1]$ przy zadanej wartości parametru oferty rynkowej θ . Wiemy, że podmiot wybrał kontrakt z parametrem $d = \frac{1}{2}$. Wobec tego parametr θ oferty rynku ubezpieczeniowego musi wynosić (z dobrym przybliżeniem):

- (A) 11,9%
- (B) 12,5%
- (C) 13,2%
- (D) 14,0%
- (E) 14,9%

Egzamin dla Aktuariuszy z 15 marca 2010 r.**Matematyka ubezpieczeń majątkowych****Arkusz odpowiedzi* T**

Imię i nazwisko : KLUCZ ODPOWIEDZI.....

PeSEL

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja ♦
1	B	
2	E	
3	D	
4	C	
5	A	
6	B	
7	D	
8	E	
9	C	
10	A	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.