

---

**Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy**

**LI Egzamin dla Aktuariuszy z 30 listopada 2009 r.**

**Część I**

**Matematyka finansowa**

**WERSJA TESTU A**

**Imię i nazwisko osoby egzaminowanej:**

.....

Czas egzaminu: 100 minut

1. W momencie  $t_0$  i przy założonej rocznej stopie procentowej  $r_0 > 0$  zakład ubezpieczeń stosuje strategię zabezpieczającą polegającą na:

- dopasowaniu obecnej wartości zobowiązań  $V_L(r_0, t_0)$  do wartości godziwej aktywów na pokrycie tych zobowiązań  $V_A(r_0, t_0)$ :

$$V_A(r_0, t_0) = V_L(r_0, t_0), \text{ oraz}$$

- utrzymaniu takiej samej wrażliwości aktywów i zobowiązań względem wahań stopy procentowej, oraz
- zapewnieniu, że  $r_0$  jest stopą optymalną dla przyjętej strategii, tzn. dla wahań stopy procentowej w granicach  $r_0 \pm 100$  p.p. wartość zobowiązań przewyższy wartość aktywów na pokrycie tych zobowiązań, tzn.:

$$V_A(r, t_0) < V_L(r, t_0) \quad \forall r \neq r_0, r \in (r_0 - 1\%, r_0 + 1\%); \text{ oraz}$$

$$V_A(r_0, t_0) - V_L(r_0, t_0) = \max_{r \in (r_0 - 1\%, r_0 + 1\%)} \{V_A(r, t_0) - V_L(r, t_0)\}$$

Zakład ubezpieczeń chce zastosować strategię zabezpieczającą w odniesieniu do zobowiązania wynikającego z trzech rent pewnych płaconych 1 200 PLN na koniec każdego roku i wygasających odpowiednio po 5, 10 i 15 latach.

Aktywami zakupionymi w celu pokrycia tego zobowiązania są dwie obligacje zero-kuponowe o nominałach:  $X_1$  oraz  $X_2$  i okresach do wygaśnięcia  $t_1$  oraz  $t_2$ , odpowiednio.

Które z podanych poniżej parametrów pozwalają zrealizować założenia strategii zabezpieczającej przy założeniu stałej stopy procentowej  $r_0 = 10\%$ ?

A)  $t_1 = 7$ ;  $t_2 = 6$ ;  $X_1 = 27\,425$  PLN;  $X_2 = 12\,360$  PLN

B)  $t_1 = 6$ ;  $t_2 = 6$ ;  $X_1 = 31\,910$  PLN;  $X_2 = 15\,450$  PLN

C)  $t_1 = 5$ ;  $t_2 = 4$ ;  $X_1 = 13\,900$  PLN;  $X_2 = 18\,183$  PLN

D)  $t_1 = 6$ ;  $t_2 = 4$ ;  $X_1 = 18\,368$  PLN;  $X_2 = 15\,638$  PLN

E)  $t_1 = 5$ ;  $t_2 = 8$ ;  $X_1 = 22\,938$  PLN;  $X_2 = 14\,593$  PLN

2. Bank  $X$  emituje obligację o nominale 100 000 PLN, okresie do wygaśnięcia 3 lata i kuponie 5% płatnym na koniec każdego roku. Zgodnie z *ratingiem* kredytowym banku  $X$ , wyznaczonym jako BBB, prawdopodobieństwa niewypłacalności  $p_n$  w roku  $n$  szacowane są następująco:  $p_1 = 20\%$ ,  $p_2 = 25\%$ ,  $p_3 = 35\%$ . Utrzymanie lub utrata wypłacalności w kolejnych latach są od siebie niezależne.

Na koniec każdego roku odbywa się ocena wypłacalności; jeśli zostanie stwierdzona jej utrata kupon należny za dany rok nie zostanie wypłacony, nastąpi w tym momencie wygaśnięcie obligacji i zwrot 50% jej nominału.

Przy założeniu stałej rocznej stopie procentowej 7% wartość rynkowa obligacji w momencie emisji wynosi (podaj najbliższą wartość):

- A) 64 846 PLN
- B) 66 437 PLN
- C) 67 311 PLN
- D) 75 008 PLN
- E) 94 751 PLN

3. Kredyt w wysokości 200 000 PLN, którego oprocentowanie wynosi 10% w skali roku, może być spłacony na dwa sposoby przy użyciu wpłat dokonywanych do funduszu umorzeniowego (ang. *sinking fund*) oraz odsetek płatnych na bieżąco. Wpłaty do funduszu umorzeniowego oraz płatności odsetek dokonywane są na koniec roku.

W pierwszym przypadku spłata kredytu następuje w okresie 5 lat, a wysokość odsetek netto uzyskanych w okresie spłaty kredytu wynosi 68 765.75 PLN, w drugim przypadku spłata trwa 10 lat, a wysokość odsetek netto wynosi 134 815.41 PLN.

Odsetki netto to różnica pomiędzy odsetkami zapłaconymi a odsetkami zakumulowanymi w funduszu.

Wiedząc, że w obu przypadkach stopa zwrotu funduszu umorzeniowego jest taka sama oblicz jej wartość. Podaj najbliższą wartość:

- A) 7%
- B) 7.5%
- C) 8%
- D) 8.5%
- E) 9%

4. Pożyczka jest spłacana za pomocą 15 rat płatnych na koniec każdego roku. Raty w pierwszych 10 latach są rosnące i wynoszą 2, 4, 6, ... 20, natomiast w ostatnich 5 latach są malejące i wynoszą 17, 14, 11, 8 i 5.

Wyznacz różnicę pomiędzy wartością odsetek zapłaconych w 6 racie i wartością odsetek zapłaconych w 12 racie. Wskaż odpowiedni wzór.

A)  $3 \cdot a_{\overline{5}|} + (3 - 2 \cdot v^5) \cdot a_{\overline{4}|} + 2 \cdot v^{10} - 5 \cdot v^5 + 2 \cdot v^4 + 2$

B)  $3 \cdot a_{\overline{4}|} + (2 - 3 \cdot v^5) \cdot a_{\overline{5}|} - 2 \cdot v^{10} - 5 \cdot v^5 + 2 \cdot v^4 - 2$

C)  $5 \cdot a_{\overline{5}|} + (3 - 2 \cdot v^5) \cdot a_{\overline{4}|} + 2 \cdot v^{10} + 5 \cdot v^5 + 2 \cdot v^4 - 2$

D)  $2 \cdot a_{\overline{4}|} + (5 - 2 \cdot v^5) \cdot a_{\overline{5}|} + 5 \cdot v^{10} - 2 \cdot v^5 + 3 \cdot v^4 + 2$

E)  $2 \cdot a_{\overline{5}|} + (2 - v^5) \cdot a_{\overline{4}|} - 5 \cdot v^{10} + 5 \cdot v^5 - 2 \cdot v^4 + 2$

5. Długoterminowy kredyt oprocentowany na poziomie 3% będzie spłacany w okresie 36 lat. W czasie pierwszych 24 lat spłaty kredytu dokonywane będą w równych ratach na końcu roku, w odstępach 3-letnich, począwszy od końca 3-ciego roku. W ostatnich 12 latach kredyt będzie spłacany w równych ratach, płatnych na koniec każdego roku.

Wiadomo, że suma wszystkich zapłaconych odsetek będzie równa sumie 2 rat płatnych w okresie pierwszych 24 lat oraz 3 rat płatnych w okresie ostatnich 12 lat, powiększonej o 100 000.

Wiadomo również, że gdyby zmniejszyć raty płatne w okresie pierwszych 24 lat o 10% oraz zwiększyć raty pozostałe o 20%, to kredyt ten można by spłacić ratami płatnymi z tą samą częstością, co pierwotnie.

Założmy, że kredytobiorca chce płacić raty wyłącznie w odstępach 3 letnich, na końcu roku. Ile wyniosłaby wysokość raty spłaty tego kredytu w okresie ostatnich 12 lat, gdyby raty w równej wysokości płatne były w tym okresie co 3 lata, począwszy od roku 27, przy założeniu, że wysokość rat w pierwszych 24 latach nie ulegnie zmianie. Podaj najbliższą wartość:

- A) 61 400
- B) 61 500
- C) 61 600
- D) 61 700
- E) 61 800

6. Na początku roku zakład ubezpieczeń chce zakupić lokaty na pokrycie następujących zobowiązań:

- a) 20-letnia renta pewna natychmiast płatna o płatnościach 10 000 dokonywanych na końcu każdego roku,
- b) świadczenie jednorazowe w kwocie 50 000 płatne na końcu 10 roku,
- c) świadczenie jednorazowe w kwocie 100 000 płatne na końcu 15 roku.

Zakład ubezpieczeń zamierza inwestować wyłącznie w obligacje. Załóżmy, że na rynku finansowym dostępne są tylko:

- obligacje 10-letnie z kuponem rocznym w wysokości 5% wartości wykupu równej wartości nominalnej wynoszącej 1000 oraz
- obligacje 20-letnie z kuponem rocznym w wysokości 5% wartości wykupu równej wartości nominalnej wynoszącej 5000.

Jaki procent środków przeznaczonych na pokrycie powyższych zobowiązań zakład ubezpieczeń powinien zainwestować w obligacje 10-letnie, aby przy stopie procentowej  $i = 5\%$  *duration* aktywów była równa *duration* zobowiązań? Podaj najbliższą wartość:

- A) 48%
- B) 50%
- C) 52%
- D) 54%
- E) 56%

7. Firma reasekuracyjna emituje 20-letnie obligacje katastroficzne z rocznym kuponem 3% wartości nominału. Jeżeli w danym roku wystąpi katastrofa, emitent jest zwolniony z obowiązku dalszego spłacania obligacji (kuponów i nominału). Zakładamy, że w danym roku wystąpić może tylko jedna katastrofa a prawdopodobieństwo jej wystąpienia wynosi 1%. Zdarzenia polegające na wystąpieniu katastrof w kolejnych latach są niezależne. Reasekurator wyemitował 1 stycznia 2009 pakiet 1000 obligacji, uzyskując nominalną łączną sumę  $S$ . Wartość rynkowa jednej obligacji w dniu emisji wyniosła 650 PLN a efektywna stopa zwrotu z inwestycji oczekiwana przez inwestorów to 5%. Fundusze ze sprzedaży obligacji reasekurator przeznacza na wypłaty odszkodowań w związku z zaszłą katastrofą. Suma  $S$ , którą uzyskał emitent ze sprzedaży obligacji katastroficznych została przez niego umieszczona na rachunku o efektywnym oprocentowaniu 2% w skali roku. Po trzech latach, na końcu 2012 roku, nastąpiła katastrofa, która spowodowała konieczność wypłacenia przez reasekuratora odszkodowań w łącznej kwocie  $X$ , równej 70% środków pozyskanych ze sprzedaży nominalów, zgromadzonych na rachunku na koniec roku 2012. Oblicz  $X$ . Odpowiedź (podaj najbliższą wartość).

A) 578 000

B) 641 000

C) 679 000

D) 713 000

E) 743 000



8. Renta wieczysta płacona na koniec roku  $k = 1, 2, \dots$  ma wartość obecną  $\frac{1}{(1-v)^3}$ , gdzie  $v = \frac{1}{(1+i)}$  jest czynnikiem dyskontującym odpowiadającym stopie  $i$ . Ile wynosi płatność tej renty na koniec roku  $k = 10$  dla  $i = 5\%$ ? Odpowiedź (podaj najbliższą wartość).
- A) 30.45
  - B) 35.45
  - C) 47.25
  - D) 57.75
  - E) Roczna płatność renty o wartości obecnej określonej wzorem  $\frac{1}{(1-v)^3}$  nie jest jednoznacznie wyznaczona.

- 
9. Rozważmy amerykańską opcję kupna na akcję niepłacącą dywidendy. Termin wygaśnięcia dla tej opcji upływa za 2 lata. Obecna cena akcji wynosi 110 a cena wykonania opcji 100. Zakładamy, że w ciągu każdego roku cena akcji rośnie bądź maleje o 10%, wolna od ryzyka stopa procentowa wynosi 4% w ujęciu rocznym oraz że rynek nie dopuszcza arbitrażu. Ile obecnie wynosi wartość czasowa (*time value*) dla rozważanej opcji? Podaj najbliższą wartość.
- A) 18.45
  - B) 8.45
  - C) 10.00
  - D) 12.14
  - E) 2.14

10. Rozpatrzmy rynek, na którym możliwe są tylko dwa przyszłe stany: I lub II. Na tym rynku dostępne są aktywa A i B oraz dwa aktywa jednostkowe. Funkcje wypłaty opisanych aktywów, w zależności od stanu, w którym znajduje się rynek podaje tabela:

Wypłata	Aktywo A	Aktywo B	Aktywo jednostkowe stanu I	Aktywo jednostkowe stanu II
Stan I	4.00	2.00	1.00	0.00
Stan II	2.00	0.50	0.00	1.00

Wiadomo ponadto, że w chwili obecnej cena aktywa A wynosi 2.60, a cena aktywa B wynosi 1.05. Zakładamy również, że rynek nie dopuszcza arbitrażu. Jakie są w chwili obecnej prawdopodobieństwa  $p$  i  $q$  przejścia odpowiednio w stan I i stan II? Podać najbliższą odpowiedź.

A)  $p = 1, q = 0$

B)  $p = \frac{50}{95}, q = \frac{45}{95}$

C)  $p = \frac{45}{95}, q = \frac{50}{95}$

D)  $p = \frac{5}{9}, q = \frac{4}{9}$

E)  $p = \frac{4}{9}, q = \frac{5}{9}$

**Egzamin dla Aktuariuszy z 30 listopada 2009 r.****Matematyka finansowa****Arkusz odpowiedzi\***

Imię i nazwisko: .....

Pesel: .....

OZNACZENIE WERSJI TESTU .....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja <sup>♦</sup>
1	D	
2	B	
3	D	
4	B	
5	A	
6	C	
7	E	
8	E	
9	B	
10	E	

\* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.