Zadanie 1.

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu gamma o gęstości

$$p(x) = \begin{cases} 16xe^{-4x} & \text{gdy } x > 0 \\ 0 & \text{gdy } x \le 0. \end{cases}$$

Niech N będzie zmienną losową niezależna od zmiennych $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ spełniającą

$$P(N=0) = \frac{1}{2} \quad \text{i} \quad P(N=1) = P(N=2) = P(N=3) = \frac{1}{6}.$$

Niech $S = \begin{cases} 0 & \text{gdy } N = 0 \\ \sum_{i=1}^{N} X_i & \text{gdy } N > 0. \end{cases}$

Wtedy $E(S - ES)^3$ jest równe

(A) $\frac{1}{16}$

(B) $\frac{7}{16}$

(C) $\frac{3}{16}$

(D) $\frac{6}{16}$

(E) $\frac{9}{16}$

Zadanie 2.

Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi każda z rozkładu wykładniczego o wartości oczekiwanej 1.
Niech $U = 2X + Y$ i $V = X - Y$.
Wtedy prawdopodobieństwo $P\left(U \in (0,6) \wedge V \in (0,6)\right)$ jest równe

(A) $1-2e^{-1}$

(B) $\frac{1}{2}\left(4e^{-3}-3e^{-4}\right)$

(C) $\frac{1}{2}\left(1-4e^{-3}+3e^{-4}\right)$

(D) $1-e^{-3}$

(E) $1-2e^{-1}$

Zadanie 3.

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$, będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie gamma z gęstością

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \theta^2 x e^{-\theta x} & gdy \ \ x > 0 \\ 0 & gdy \ \ x \leq 0 \end{cases}$$

Budujemy estymator wariancji czyli funkcji $v(\theta) = \frac{2}{\theta^2}$ postaci $\hat{v} = c \cdot \mathrm{ENW}(v(\theta))$, gdzie $\mathrm{ENW}(v(\theta))$ oznacza estymator największej wiarogodności funkcji v. Jeśli wiadomo, że $\hat{v}$ jest nieobciążony, to stała c jest równa

(A) $\frac{n}{1+2n}$

(B) $2n$

(C) $\frac{1+2n}{n}$

(D) $\frac{2n}{1+2n}$

(E) $\frac{1+2n}{2n}$

Zadanie 4.

Rozpatrzmy następujący model regresji liniowej bez wyrazu wolnego:

$$Y_i = \beta \cdot x_i + \varepsilon_i \qquad (i = 1,....,16),$$

gdzie $x_i > 0$ są znanymi liczbami, β jest nieznanym parametrem, zaś ε_i są błędami losowymi. Zakładamy, że ε_i są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach normalnych i

$$E[\varepsilon_i] = 0 \quad \text{i} \quad Var[\varepsilon_i] = x_i^2 \qquad (i = 1,....,16).$$

Niech $\hat{\beta}$ będzie estymatorem parametru β o następujących własnościach:

$\hat{\beta}$ jest liniową funkcją obserwacji, tzn. jest postaci $\hat{\beta} = \sum_{i=1}^{16} c_i Y_i$,

$\hat{\beta}$ jest nieobciążony,

$\hat{\beta}$ ma najmniejszą wariancję spośród estymatorów liniowych i nieobciążonych.

Wyznaczyć stałą c taką, że spełniony jest warunek

$$P\left(\left|\hat{\beta} - \beta\right| < c\right) = 0,95.$$

(A) $c = 0,49$

(B) $c = \dfrac{7,84}{\sqrt{\sum_{i=1}^{16} x_i}}$

(C) $c = 1,64$

(D) $c = 0,49\sqrt{\sum_{i=1}^{16} x_i}$

(E) $c = \dfrac{1,96}{\sqrt{\sum_{i=1}^{16} x_i}}$

Zadanie 5.

Niech $X_1,...,X_n$, $n>1$, będzie próbką z rozkładu jednostajnego o gęstości danej wzorem:

$$f_\theta(x)=\begin{cases} 1/\theta & \text{dla} \quad 0\le x\le\theta; \\ 0 \quad \text{w} & \text{przeciwnym} \quad \text{przypadku}, \end{cases}$$

gdzie $\theta>0$ jest nieznanym parametrem.
Zmienne losowe $X_1,...,X_n$ nie są w pełni obserwowalne. Obserwujemy zmienne losowe $Y_i=\min(X_i,M)$, gdzie M jest ustaloną liczbą dodatnią. Oblicz estymator największej wiarogodności $\hat{\theta}$ parametru θ jeśli wiadomo, że w próbce $Y_1,...,Y_n$, jest K obserwacji o wartościach mniejszych niż M i $K\in\{1,2,\dots,n-1\}$.

(A) $\hat{\theta}=M+\dfrac{n}{K}$

(B) $\hat{\theta}=\dfrac{Mn}{K}$

(C) $\hat{\theta}=\dfrac{Mn}{n-K}$

(D) $\hat{\theta}=M+\dfrac{n-K}{n}$

(E) nie można zastosować metody największej wiarogodności w tym modelu

Zadanie 6.

Rozważmy następujące zagadnienie testowania hipotez statystycznych. Dysponujemy próbką $X_1,\ldots,X_n$ z rozkładu normalnego o nieznanej średniej μ i znanej wariancji równej 4. Przeprowadzamy najmocniejszy test hipotezy $H_0:\mu=0$ przeciwko alternatywie $H_1:\mu=-1$ na poziomie istotności $\alpha=1/2$. Niech β_n oznacza prawdopodobieństwo błędu drugiego rodzaju, dla rozmiaru próbki n.

Wybierz poprawne stwierdzenie:

(A) $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n n=1$

(B) $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n\sqrt{n}=1$

(C) $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n e^{\frac{n}{8}}=1$

(D) $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n\dfrac{e^{\frac{n}{8}}\sqrt{\pi n}}{\sqrt{2}}=1$

(E) $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n\dfrac{e^{\frac{n}{8}}\sqrt{\pi}}{4\sqrt{2}}=1$

Zadanie 7.

W urnie znajduje się 20 kul białych, 20 kul czarnych i 20 kul niebieskich. Losujemy bez zwracania 24 kule. Niech

- X oznacza liczbę wylosowanych kul białych,
- Y oznacza liczbę wylosowanych kul czarnych,
- Z oznacza liczbę wylosowanych kul niebieskich.

Współczynnik korelacji zmiennych losowych $X+2Y$ i Z,

$$corr(X+2Y,Z),$$

jest równy

(A) -1

(B) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(C) $-\frac{3}{4}$

(D) 0

(E) $-\frac{1}{2}$

Zadanie 8.

Niech $X_1,\ldots,X_n,\ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie Pareto o gęstości

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\theta}{(1+x)^{\theta+1}} & \text{gdy } x>0\\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku,}\end{cases}$$

gdzie $\theta>1$ jest ustalone.
Niech N będzie zmienną losową niezależną od $X_1,\ldots,X_n,\ldots$, o rozkładzie geometrycznym

$$P(N=n)=(1-q)q^n \quad \text{gdy} \quad n=0,1,2,\ldots,$$

gdzie $q\in(0,1)$ jest ustaloną liczbą.
Niech

$$Z=\begin{cases}\min\{X_1,\ldots,X_N\}, & gdy \quad N>0;\\ 0 \quad gdy \quad N=0. & \end{cases}$$

Oblicz $E(N\mid Z=z)$ przy założeniu, że $z>0$.

(A) $\dfrac{2(1+z)^{\theta}}{(1+z)^{\theta}+q}$

(B) $\dfrac{2(1+z)^{\theta}}{(1+z)^{\theta}-q}$

(C) $\dfrac{(1+z)^{\theta}+3q}{(1+z)^{\theta}+q}$

(D) $\dfrac{(1+z)^{\theta}+q}{(1+z)^{\theta}-q}$

(E) $\dfrac{(1+z)^{\theta}}{(1+z)^{\theta}-q}$

Zadanie 9.

Rozważamy łańcuch Markowa $X_1, X_2, ...$ na przestrzeni stanów $\{0,1,2\}$ o macierzy przejścia

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

(gdzie $P_{ij} = \mathrm{P}\left(X_{n+1} = j \mid X_n = i\right)$ dla $i, j = 0,1,2$).

Niech $Z_1, Z_2, ..., Z_n, ...$ będzie ciągiem zmiennych losowych o wartościach w zbiorze $\{0,1\}$, niezależnych od siebie nawzajem i od zmiennych $X_1, X_2, ..., X_n, ...$, o jednakowym rozkładzie prawdopodobieństwa:

$$\mathrm{P}(Z_i = 1) = \frac{3}{4} \text{ i } \mathrm{P}(Z_i = 0) = \frac{1}{4}.$$

Niech $Y_i = Z_i \cdot X_i$. Wtedy $\lim_{n \to \infty} \mathrm{P}(Y_n > Y_{n+1})$ jest równy

A) $\frac{32}{144}$

(B) $\frac{57}{144}$

(C) $\frac{35}{144}$

(D) $\frac{26}{144}$

(E) $\frac{41}{144}$

Zadanie 10.

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu o gęstości

$$f_\theta(x) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)} & gdy \;\; x \ge \theta \\ 0 & gdy \;\; x < \theta \end{cases}$$

gdzie $\theta \in R$ jest nieznanym parametrem. Zbudowano test jednostajnie najmocniejszy dla weryfikacji hipotezy $H_0:\ \theta = 0$ przy alternatywie $H_1:\ \theta \ne 0$ na poziomie istotności $\alpha \in (0,1)$.
Obszar krytyczny tego testu jest równy

(A) $\left\{\min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\} \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{-\ln\alpha}{n}, +\infty\right)\right\}$

(B) $\left\{\min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\} \in \left(-\infty, \frac{\ln\alpha}{n}\right) \cup \left(\frac{-\ln\alpha}{n}, +\infty\right)\right\}$

(C) $\left\{\min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\} \in \left(0, \frac{-\ln(1-\alpha)}{n}\right)\right\}$

(D) $\left\{\min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\} \in \left(-\infty, \frac{-1}{n}\ln\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right) \cup \left(\frac{\ln 2 - \ln\alpha}{n}, +\infty\right)\right\}$

(E) $\left\{\min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\} \in \left(-\infty, -\frac{\ln(1-\alpha)}{n}\right)\right\}$

Egzamin dla Aktuariuszy z 5 października 2009 r.

Prawdopodobieństwo i statystyka

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ : .... K L U C Z   O D P O W I E D Z I ....
~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	B	
2	C	
3	D	
4	A	
5	B	
6	D	
7	B	
8	D	
9	E	
10	A	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.
♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.