

Zadanie 1.

Rzucono niezależnie 80 razy symetryczną monetą. Niech X oznacza łączną liczbę orłów, a Y liczbę orłów w pierwszych 20 rzutach. Wtedy współczynnik korelacji $\rho(X, Y)$ jest równy

(A) 0

(B) $\frac{1}{2}$

(C) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(D) $\frac{1}{4}$

(E) 1

Zadanie 2.

Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładów prawdopodobieństwa o gęstościach

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{8}{3}x^3 \exp(-2x) & \text{gdy } x > 0 \\ 0 & \text{gdy } x \leq 0 \end{cases} \quad \text{i} \quad f_Y(x) = \begin{cases} \frac{4}{3}x^4 \exp(-2x) & \text{gdy } x > 0 \\ 0 & \text{gdy } x \leq 0 \end{cases}$$

Niech $U = \frac{X}{X+Y}$ i $V = X+Y$.

Wtedy

(A) $E(U) = \frac{4}{5}$

(B) $E(U|V) = \frac{4}{9}$

(C) $E(U|V) = \frac{2}{V}$

(D) $E(V|U) = \frac{2}{U}$

(E) $E(V) = \frac{7}{2}$

Zadanie 3.

Niech $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots, I_1, I_2, \dots, I_n, \dots, N$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi. Zmienne $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ mają rozkład o wartości oczekiwanej 2 i wariancji 1. Zmienne $I_1, I_2, \dots, I_n, \dots$ mają rozkład jednostajny na przedziale $(0,1)$. Zmienna N ma rozkład ujemny

dwumianowy $P(N = n) = \frac{\Gamma(2+n)}{n!} \left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^n$ dla $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\text{Niech } S_N = \begin{cases} 0 & \text{gdy } N = 0 \\ \sum_{i=1}^N I_i X_i & \text{gdy } N > 0 \end{cases}.$$

Wtedy $\text{Var}(S_N)$ jest równa

(A) $\frac{8}{9}$

(B) $\frac{4}{9}$

(C) $\frac{4}{3}$

(D) $\frac{10}{9}$

(E) $\frac{17}{18}$

Zadanie 4.

W urnie znajduje się nieznana liczba N kul, wśród których jest 7 kul czerwonych. Losujemy 6 kul i zliczamy X liczbę kul czerwonych. Weryfikujemy hipotezę $H: N=15$ przy alternatywie, że $K: N>15$. Przy poziomie istotności $\frac{12}{143}$ test jednostajnie najmocniejszy odrzuca hipotezę H , gdy

- (A) $X < 1$
- (B) $X < 2$
- (C) $X < 3$
- (D) $X > 3$
- (E) $X > 4$

Zadanie 5.

Na podstawie prostej próby losowej X_1, X_2, \dots, X_{10} testowano hipotezę $H_0: \sigma^2 = 2$ przy alternatywie $H_1: \sigma^2 = 0,5$, gdzie σ^2 jest parametrem odpowiadającym za wariancję zmiennej losowej X_i .

Jeżeli dodatkowo wiadomo, że zmienne losowe X_i mają rozkład zadany gęstością

$$f_{\theta}(x) = \begin{cases} \theta^2 x e^{-\theta x} & \text{gdy } x > 0 \\ 0 & \text{gdy } x \leq 0 \end{cases},$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem, to przy poziomie istotności $\alpha = 0,05$, obszar krytyczny testu opartego na ilorazie wiarygodności jest równy

(A) $\sum_{i=1}^{10} X_i < 13,25$

(B) $\sum_{i=1}^{10} X_i > 27,88$

(C) $\sum_{i=1}^{10} X_i > 9,15$

(D) $\sum_{i=1}^{10} X_i > 15,71$

(E) $\sum_{i=1}^{10} X_i < 5,43$

Zadanie 6.

Dysponujemy dwiema urnami: A i B. W urnie A są dwie kule białe i trzy czarne, w urnie B są cztery kule białe i jedna czarna. Wykonujemy trzy etapowe doświadczenie:

1 etap: losujemy urnę (wylosowanie każdej urny jest jednakowo prawdopodobne);

2 etap: z wylosowanej urny ciągniemy 2 kule bez zwracania, a następnie wrzucamy do tej urny 2 kule białe i 2 czarne;

3 etap: z urny, do której wrzuciliśmy kule, losujemy jedną kulę.

Okazało się, że wylosowana w trzecim etapie kula jest biała.

Obliczyć prawdopodobieństwo, że w drugim etapie wylosowano dwie kule jednego koloru.

- (A) 0,2
- (B) 0,4
- (C) 0,5
- (D) 0,6
- (E) 0,3

Zadanie 7.

Niech $X_0, X_1, X_2, \dots, X_n$, $n > 2$, będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu Pareto o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{(1+x)^4} & \text{gdy } x > 0 \\ 0 & \text{gdy } x \leq 0 \end{cases}$$

Niech $U = \min\{X_0, X_1, X_2, \dots, X_n\}$. Wtedy $E(U | X_0 = 1)$ jest równa

(A) $\frac{1}{3n+2} \left(1 - \frac{1}{2^{3n+2}}\right)$

(B) $\frac{1}{3n-1} \left(1 - \frac{1}{2^{3n-1}}\right) - \frac{1}{2^{3n}}$

(C) $\frac{1}{(3n-1)2^{3n-1}}$

(D) $\frac{1}{2^{3n}} + \frac{1}{3n-1} \left(1 - \frac{1}{2^{3n-1}}\right)$

(E) $\frac{1}{3n-1} \left(1 - \frac{1}{2^{3n-1}}\right)$

Zadanie 8.

Niech X_1, X_2, \dots, X_n , $n \geq 2$, będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie normalnym o wartości oczekiwanej 1 i nieznannej wariancji σ^2 .

Rozważamy rodzinę estymatorów parametru σ postaci $S_a = a \sum_{i=1}^n |X_i - 1|$, przy czym a jest liczbą dodatnią. Wyznaczyć a^* , tak by estymator S_{a^*} był estymatorem o najmniejszym błędzie średniokwadratowym wśród estymatorów postaci S_a .

(A) $a^* = \frac{1}{n}$

(B) $a^* = \frac{1}{n-1}$

(C) $a^* = \frac{\sqrt{2\pi}}{n+2\pi-1}$

(D) $a^* = \frac{\sqrt{2\pi}}{2n+\pi-2}$

(E) $a^* = \frac{2\sqrt{\pi}}{2n+\pi-2}$

Zadanie 9.

Niech X_1, X_2, \dots, X_n będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie jednostajnym na przedziale (a, b) , $a < b$ i $n > 2$. Rozważamy estymator parametru $b - a$ postaci

$$c(\max\{X_1, X_2, \dots, X_n\} - \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}),$$

gdzie c dobrano tak, aby był to estymator nieobciążony.

Wariancja tego estymatora jest równa

A) $\frac{2(b-a)^2}{(n+1)(n-1)}$

(B) $\frac{2n(b-a)^2}{(n+1)^2(n+2)}$

(C) $\frac{2n(b-a)^2}{(n-1)^2(n+2)}$

(D) $\frac{2(b-a)^2}{(n+2)(n-1)}$

(E) $\frac{2(b-a)^2}{(n+1)(n+2)}$

Zadanie 10.

Niech X_1, X_2, \dots, X_{10} będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie o gęstości

$$f_{\theta}(x) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1} & \text{gdy } x \in (0,1) \\ 0 & \text{gdy } x \notin (0,1) \end{cases}$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Wyznaczamy przedział ufności dla parametru θ postaci

$$[c\hat{\theta}, d\hat{\theta}],$$

gdzie $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_{10})$ jest estymatorem największej wiarygodności, a stałe c i d są dobrane tak, aby $P_{\theta}(\theta < c\hat{\theta}) = P_{\theta}(\theta > d\hat{\theta}) = 0,05$. Wyznaczyć c i d .

- (A) $c = 0,54$ i $d = 1,57$
- (B) $c = 0,39$ i $d = 1,83$
- (C) $c = 0,11$ i $d = 1,11$
- (D) $c = 0,23$ i $d = 2,21$
- (E) $c = 0,27$ i $d = 1,29$

Egzamin dla Aktuariuszy z 6 kwietnia 2009 r.**Prawdopodobieństwo i statystyka****Arkusz odpowiedzi***

Imię i nazwisko: KLUCZ ODPOWIEDZI

Pesel

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja ♦
1	B	
2	B	
3	C	
4	B	
5	A	
6	C	
7	E	
8	D	
9	D	
10	A	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.