Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

XLIX Egzamin dla Aktuariuszy z 6 kwietnia 2009 r.

Część I

Matematyka finansowa

WERSJA TESTU A

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej:

....

Czas egzaminu: 100 minut

1. Zakład ubezpieczeń stosuje strategię zabezpieczającą polegającą na:

(i) dopasowaniu obecnej wartości zobowiązań do wartości godziwej aktywów pokrywających te zobowiązania, oraz

(ii) utrzymaniu takiej samej wrażliwości aktywów i zobowiązań względem wahań stopy procentowej.

Ubezpieczyciel chce zastosować strategię zabezpieczającą w odniesieniu do trzech rent pewnych płacących 1 000 PLN na koniec każdego roku i wygasających odpowiednio po 10, 12 i 15 latach. W celu osłonienia tego zobowiązania zakupione zostały dwie obligacje zero-kuponowe o nominałach: X_1 oraz X_2 i okresach do wygaśnięcia t_1 oraz t_2, odpowiednio.

Podaj wartości parametrów pozwalających zrealizować założenia strategii zabezpieczającej przy stałej stopie procentowej 10%.

A) $t_1 = 3\,;\ t_2 = 14\,;\ X_1 = 18\,200\ PLN\,;\ X_2 = 26\,165\ PLN$

B) $t_1 = 4\,;\ t_2 = 13\,;\ X_1 = 24\,179\ PLN\,;\ X_2 = 13\,980\ PLN$

C) $t_1 = 7\,;\ t_2 = 10\,;\ X_1 = 28\,560\ PLN\,;\ X_2 = 15\,325\ PLN$

D) $t_1 = 5\,;\ t_2 = 12\,;\ X_1 = 27\,546\ PLN\,;\ X_2 = 10\,860\ PLN$

E) $t_1 = 4\,;\ t_2 = 8\,;\ X_1 = 18\,669\ PLN\,;\ X_2 = 16\,748\ PLN$

2. Inwestor działający na rynku opcji na akcje otrzymał następujące kwotowania:

(i) obecna cena akcji X: 100 PLN,

(ii) nominalna stopa wolna od ryzyka: 7% w skali roku,

(iii) europejska opcja kupna na 1 akcję X z ceną wykonania 95 PLN, wygasająca za 6 miesięcy kosztuje 11.4 PLN,

(iv) europejska opcja sprzedaży na 1 akcję X z ceną wykonania 95 PLN, wygasająca za 6 miesięcy kosztuje 5.6 PLN.

Inwestor uważa, że wykorzystując jedną akcję X istnieje możliwość zrealizowania zysku arbitrażowego. Strategia arbitrażowa ma opierać się na zajęciu odpowiednich pozycji na rynku opcji oraz na rynku akcji i instrumentów wolnych od ryzyka. Zysk arbitrażowy na chwilę obecną wynosi (do obliczeń przyjmij kapitalizację ciągłą, dopuszczamy możliwość krótkiej sprzedaży akcji bez kosztów transakcyjnych):

A) 2.47 PLN

B) 2.56 PLN

C) 5.41 PLN

D) 5.60 PLN

E) 11.40 PLN

3. Proces ceny akcji S(t) przedstawia tabela

$t \setminus \omega$	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
t=0	7	7	7	7
t=1	11	11	4	4
t=2	13	10	6	2

Tabela podaje wartości $S(t,\omega_k)$ procesu S(t) dla poszczególnych zdarzeń elementarnych ω_k, k=1, 2, 3, 4. Zdarzenie $\omega_k \in \Omega$ należy w modelu interpretować jako ścieżkę wzrostów i spadków ceny akcji w trzech kolejnych okresach t =0, 1, 2, zaś Ω jest przestrzenią zdarzeń elementarnych. Rozważmy stwierdzenia:

(i) Element F_1 filtracji **F** generowanej przez proces S(t) ma postać

$F_1=\{\emptyset, \Omega, \{\omega_1, \omega_2\},\{\omega_3, \omega_4\}\}$.

(ii) Jeżeli wzrosty i spadki cen akcji w modelu są jednakowo prawdopodobne, to warunkowa wartość oczekiwana $\mathbf{E}(S(t=2)|\ F_1)$ przyjmuje wartość 5.5 dla ω_3, ω_4.

(iii) Jeżeli wzrosty i spadki cen akcji w modelu są jednakowo prawdopodobne, to warunkowa wartość oczekiwana $\mathbf{E}(S(t=2)|\ F_1)$ przyjmuje wartość 11.5 dla ω_1, ω_2.

(iv) Jeżeli stopa wolna od ryzyka przekracza 2/11, to miara martyngałowa nie istnieje.

Liczba stwierdzeń prawdziwych wśród powyższych to:

A) 0

B) 1

C) 2

D) 3

E) 4

4. Funkcja intensywności oprocentowania w chwili t dla kwoty zainwestowanej w chwili s, $0 \le s \le t$ wynosi $\delta(s,t) = \dfrac{1}{1+s+t}$. Funkcja a(s,t) jest wartością w chwili t kwoty 1 zainwestowanej w chwili s. Inwestor A rozpoczął inwestycję w chwili s=2 i zakończył w chwili t=5. Inwestor B również rozpoczął inwestycję w chwili s=2, przerwał ją po czasie 1 (na bardzo krótko), a następnie posiadaną kwotę ponownie zainwestował do chwili t=5. Wyznacz różnicę między zyskiem inwestorów A i B, tzn. $a(2,5) - \left[a(2,3) \cdot a(3,5)\right]$. Odpowiedź (podaj najbliższą wartość).

A) 2/35
B) 3/35
C) 4/35
D) 5/35
E) 6/35

5. Wiadomo, że w chwili 0 cena obligacji zerokuponowej zapadającej w chwili $T > 0$ wynosi:

$$P(0,T) = \exp(-0.1T)\,, \qquad T > 0.$$

Wiadomo ponadto, że krzywa stóp spot ma postać $\mathrm{R}(0,s) = 0.1$, ;dla $0 \leq s < 1$. Następnie, począwszy od chwili $s = 1$, z prawdopodobieństwem $q > 0$ opisuje ją funkcja

$$R(1,s) = 0.1 + u(s), \qquad s \geq 1,$$

zaś z prawdopodobieństwem $1 - q$ opisuje ją funkcja

$$R(1,s) = 0.1 - d(s), \qquad s \geq 1,$$

dla pewnych ściśle dodatnich krzywych dochodowości $u(s), d(s)$. Załóżmy, że $u(s)$ jest ustaloną funkcją, zaś $d(2)$ jest znane oraz, że rynek nie dopuszcza arbitrażu. Ile wynosi $\lim_{s\to\infty} d(s)$? Podaj najbliższą odpowiedź.

A) $\exp(-2)$

B) $\exp(-0.1)$

C) 0

D) 1

E) $+\infty$

6. Rozpatrzmy amerykańską opcję kupna na akcję niepłacącą dywidendy, dla której termin wygaśnięcia upływa za 4 miesiące. Obecna cena akcji wynosi 40 a cena wykonania opcji 44. Wiadomo, że w ciągu każdego miesiąca kurs akcji rośnie bądź spada o 15%. Zakładamy ponadto, że rynek nie dopuszcza arbitrażu. Stopa wolna od ryzyka wynosi 5% w ujęciu rocznym. Przy podanych założeniach cena tej opcji wynosi, w przybliżeniu:

A) 2.5
B) 2.8
C) 3.2
D) 3.8
E) 4.2

7. Kredytobiorca zaciągnął kredyt w wysokości 300 000 na okres 20 lat. Kredyt ma być spłacany następująco:

- przez pierwsze 10 lat, ratami płatnymi na koniec każdego roku o wartości R1, przy oprocentowaniu 7%,
- przez drugie 10 lat, ratami płatnymi na koniec każdego roku o wartości R2, przy oprocentowaniu 9%,.

Bezpośrednio po zapłaceniu 15 raty kredytobiorca uzgodnił z bankiem, że dodatkowo pożyczy 100 000 oraz, że spłaci całość zadłużenia w ciągu 10 lat ratami płatnymi na koniec każdego roku o wartości R3, przy oprocentowaniu 8%.

Wiedząc, że suma odsetek, jakie zapłacił kredytobiorca w 7 i 14 racie spłaty kredytu wynosi 31 621.60, obliczyć ile wyniesie sumaryczna kwota odsetek, jakie zapłaci kredytobiorca w czasie spłaty kredytu w ostatnich 10 latach (po zmianie warunków kredytu). Podaj najbliższą wartość.

A) 108 400
B) 108 800
C) 109 200
D) 109 600
E) 110 000

8. Kredyt w wysokości 100 000, zaciągnięty na okres 15 lat, jest spłacany ratami o równej wysokości R, płatnymi na koniec roku. W momencie płacenia K – tej raty kredytobiorca decyduje się na wpłacenie dodatkowej kwoty w wysokości kwoty kapitału, który byłby spłacony w następnej racie, gdyby zachowany został dotychczasowy tryb spłaty kredytu. Kredytobiorca obliczył, że po tej operacji, płacąc w kolejnych latach raty tej samej wysokości jak dotychczas tzn. R, aż do momentu spłaty kredytu, zapłaci w sumie o 7 014.03 mniej odsetek niż w przypadku, gdyby nie dokonywał dodatkowej wpłaty.
Znajdź wartość K, wiedząc, że oprocentowanie kredytu wynosi 10%.

A) 5
B) 6
C) 7
D) 8
E) 9

9. W portfelu inwestycyjnym znajdują się trzy rodzaje instrumentów finansowych:

- 15 – letnie zero kuponowe obligacje,
- 20 – letnie obligacje z kuponem o wartości 5% wartości nominalnej, płatnym na koniec roku,
- bezterminowe obligacje (perpetuity) wypłacające na koniec każdego roku stałą kwotę.

Duration całego portfela wynosi 17, 5, natomiast duration portfela składającego się tylko z obligacji 15 - letnich i obligacji bezterminowych wynosi 20.

Wyznacz, udział procentowy obligacji 20 – letnich w portfelu, przy założeniu, że stopa procentowa jest równa 5% (podaj najbliższą wartość).

A) 32%

B) 34%

C) 36%

D) 38%

E) 40%

10. Rozważane są dwa sposoby 15 – letniego inwestowania środków w fundusze inwestycyjne F_1, F_2 i F_3, których stopy zwrotu wynoszą odpowiednio i_1 = 10% , i_2 = 7% i i_3 = 8%.

Sposób 1 – środki wpłacane są do funduszu F_1, następnie na końcu każdego roku uzyskane w tym roku odsetki reinwestowane są w funduszu F_2, a z kolei odsetki uzyskane w funduszu F_2 są reinwestowane w analogiczny sposób w F_3 (odsetki uzyskane w funduszu F_3 reinwestowane są w tym samym funduszu).

Sposób 2 - środki wpłacane są do funduszu F_1, następnie na końcu każdego parzystego roku uzyskane w tym roku odsetki reinwestowane są w funduszu F_2 (odsetki uzyskane w funduszu F_2 reinwestowane są w tym samym funduszu).

Niech j_1 oznacza efektywną roczną stopą zwrotu z inwestycji wykonywanej sposobem 1, a j_2 analogiczną stopę zwrotu z inwestycji wykonywanej sposobem 2. Oblicz różnicę $j_2 - j_1$ (podaj najbliższą wartość).

A) - 1 %,
B) – 0.5 %
C) 0.5 %
D) 1.0 %
E) 1.5 %

Egzamin dla Aktuariuszy z 6 kwietnia 2009 r.

Matematyka finansowa

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko: ....

Pesel: ....

OZNACZENIE WERSJI TESTU ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	E	
2	A	
3	D	
4	A	
5	C	
6	D	
7	B	
8	C	
9	C	
10	C	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.
♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.