Zadanie 1.

Niech N oznacza liczbę szkód zaszłych w ciągu roku z pewnego ubezpieczenia, z czego:

- M to liczba szkód zgłoszonych przed końcem tego roku
- K to liczba szkód które zostaną zgłoszone w ciągu następnego roku.

Oczywiście zachodzi $N = M + K$.

Wiadomo, że zmienne M oraz K są warunkowo (przy ustalonej wartości parametru ryzyka Λ) niezależne i mają rozkłady Poissona z parametrami odpowiednio:

- Λq - zmienna M,
- Λp - zmienna K,

gdzie $p = 1 - q$ to liczba z przedziału $(0, 1)$.

O parametrze ryzyka Λ wiadomo, że:

- ma on rozkład Gamma o wartości oczekiwanej $\frac{\alpha}{\beta}$ i wariancji $\frac{\alpha}{\beta^2}$

Oczekiwana liczba szkód zaszłych w ciągu roku pod warunkiem, że do końca roku zgłoszono m szkód, a więc:

$$\mathrm{E}\left(N \middle| M = m\right)$$

wynosi:

(A) $m + \dfrac{\alpha + mp}{\beta + q}$

(B) $m + \dfrac{\alpha p + mp}{\beta + q}$

(C) $m + \dfrac{\alpha p + mp}{\beta q + q}$

(D) $m + \dfrac{\alpha + mp}{\beta q + q}$

(E) $m + \dfrac{\alpha + m}{\beta + q}$

Zadanie 2.

Rozważamy klasyczny proces nadwyżki ubezpieczyciela z zerową nadwyżką początkową $U(t) = ct - S_{N(t)}$, gdzie:

- ct jest sumą składek zgromadzonych do momentu t,
- $N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem intensywności λ,
- $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ jest sumą wartości n pierwszych szkód
- wartości szkód $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ są i.i.d, niezależne od procesu $N(t)$

O rozkładzie wartości pojedynczej szkody wiemy tylko tyle, że:

- $\Pr(Y_1 \in [0,1]) = 1$
- $\mathrm{E}(Y_1) = 1/10$.

Wiemy też, że $c > \lambda/10$

Wobec tego wartość oczekiwana deficytu w momencie ruiny (pod warunkiem że do ruiny dojdzie) może przyjmować różne wartości. Przedział, który zawiera wszystkie te wartości (i nic ponadto) jest postaci:

(A) $\left[\frac{1}{30}, \frac{1}{3}\right]$

(B) $\left[\frac{1}{15}, \frac{1}{3}\right]$

(C) $\left[\frac{1}{20}, \frac{1}{2}\right]$

(D) $\left[\frac{1}{30}, \frac{1}{2}\right]$

(E) $\left[\frac{1}{10}, \frac{1}{2}\right]$

Zadanie 3.
Wiadomo, że w ubezpieczeniu odpowiedzialności cywilnej właścicieli motocykli szkodowość jest sezonowa. Z doświadczeń lat ubiegłych wiemy, że oczekiwana wartość szkód z rocznej polisy wystawionej na jeden motocykl rozkłada się na kwartały kalendarzowe zgodnie ze współczynnikami udziałowymi podanymi w drugiej kolumnie poniższej tabeli. W trzeciej kolumnie tabeli podane są także kwoty składki przypisanej u pewnego ubezpieczyciela w roku 2008.

Kwartał roku kalendarzowego	**udział w oczekiwanej wartości szkód w roku**	**Składka przypisana w roku 2008**
Q1	10%	20 tys. zł
Q2	25%	80 tys. zł
Q3	50%	60 tys. zł
Q4	15%	40 tys. zł

Przy założeniach, że:
- Wszystkie umowy są roczne
- Umowy ubezpieczeniowe zawarte w danym kwartale zawierane są średnio w połowie tego kwartału
- Ryzyko w ciągu danego kwartału rozkłada się równomiernie
- Kwartały są równej długości
- Rezerwa składki na koniec roku 2007 u tego ubezpieczyciela wyniosła 80 tys. zł.

Wartość składki zarobionej w roku 2008 wynosi:

(A) 188 tys. zł

(B) 192 tys. zł

(C) 196 tys. zł

(D) 200 tys. zł

(E) 204 tys. zł

Zadanie 4.
Rozważamy klasyczny proces nadwyżki ubezpieczyciela, a więc proces:
$U(t) = u + (1+\theta)\lambda\mu_Y t - S_{N(t)}$, gdzie:

- $N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem intensywności λ,
- $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ (lub zero, jeśli $n = 0$)
- $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ to niezależne zmienne losowe o tym samym rozkładzie danym na półosi dodatniej gęstością: $f_Y(y) = \frac{\alpha v^{\alpha}}{(v+y)^{\alpha+1}}$, o wartości oczekiwanej μ_Y

Wiemy, że parametry procesu wynoszą:

- $\alpha = 2$, $\theta = \frac{1}{5}$, oraz $u = 4\mu_Y$

Prawdopodobieństwo, iż do ruiny dojdzie, i to dojdzie w pierwszym momencie, w którym nadwyżka spadła poniżej poziomu wyjściowego u, a więc że:
$\exists T > 0$ takie, że:

- $U(T) < 0$ oraz $\forall t \in (0, T)$ $U(t) \geq u$

wynosi:

(A) $\frac{1}{4}$

(B) $\frac{1}{5}$

(C) $\frac{1}{6}$

(D) $\frac{1}{10}$

(E) $\frac{1}{9}$

Zadanie 5.
Liczba szkód w ciągu roku w pewnym ubezpieczeniu równa jest:

$N = M_1 + \ldots + M_K$, gdzie:

- $K, M_1, M_2, M_3, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi,
- K oznacza liczbę wypadków, i ma rozkład Poissona o wartości oczekiwanej λ,
- $M_1, M_2, M_3, \ldots$ to liczby szkód z poszczególnych wypadków - mają one identyczny rozkład prawdopodobieństwa dany funkcją:

$$\Pr(M_1 = k) = \frac{1}{-\ln(1-c)} \frac{c^k}{k}, \quad k = 1,2,3,\ldots \qquad \text{z parametrem } c = 1 - e^{-1},$$

Prawdopodobieństwo warunkowe iż w danym roku doszło do jednego wypadku pod warunkiem, iż wystąpiły 4 szkody:

$$\Pr(K = 1 | N = 4)$$

wynosi:

(A) $\dfrac{24}{(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)(\lambda+4)}$

(B) $\dfrac{6}{(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)}$

(C) $\dfrac{2e^{-\lambda}}{(\lambda+1)(\lambda+2)}$

(D) $\dfrac{6e^{-\lambda}}{(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)}$

(E) $\dfrac{24e^{-\lambda}}{(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)(\lambda+4)}$

Zadanie 6.

W pewnym ubezpieczeniu liczba szkód, które w ciągu t lat wygeneruje ubezpieczony charakteryzujący się wartością λ parametru ryzyka Λ ma rozkład warunkowy Poissona z wartością oczekiwaną λt.

Zakładamy, że rozkład wartości parametru ryzyka Λ w populacji ubezpieczonych dany jest na półosi dodatniej gęstością:

- $f_\Lambda(\lambda) = \dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha-1} \exp(-\beta\lambda)$.

Wiemy, że:

- prawdopodobieństwo p_0 iż losowo wybrany ubezpieczony w ciągu jednego roku nie zgłosi szkody równe jest 36/49;
- prawdopodobieństwo $p_{0,0}$ iż losowo wybrany ubezpieczony w ciągu dwóch kolejnych lat nie zgłosi szkody równe jest 9/16.

Wobec tego wartości parametrów (α, β) wynoszą:

(A) $(\alpha, \beta) = (2, 6)$

(B) $(\alpha, \beta) = (2, 5)$

(C) $(\alpha, \beta) = (2, 4)$

(D) $(\alpha, \beta) = (1, 3)$

(E) $(\alpha, \beta) = (1, 4)$

Zadanie 7.
$N, Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ to niezależne zmienne losowe, N ma rozkład Poissona z wartością oczekiwaną równą 10, zaś $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ mają identyczny rozkład Pareto o dystrybuancie określonej na półosi dodatniej wzorem:

- $F(y) = 1 - \left(\frac{1}{1+y}\right)^2$

Niech $M = \max\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_N\}$, przy czym jeśli $N = 0$, to przyjmujemy $M = 0$.
Niech $m_{0.95}$ oznacza taką liczbę, że $\Pr(M \le m_{0.95}) = 0.95$
Liczba $m_{0.95}$ wynosi (z przybliżeniem do jednej dziesiątej):

(A) 14.0

(B) 13.0

(C) 11.9

(D) 10.8

(E) 9.7

Zadanie 8.
X_1 i X_2 to dwa niezależne ryzyka o zbiorze możliwych wartości $\{0,1,2,...\}$. Znamy wartości dystrybuant $F_1(x) = \Pr(X_1 \leq x)$ oraz $F_S(x) = \Pr(X_1 + X_2 \leq x)$:

x	$F_1(x)$	$F_S(x)$
0	0.6	0.18
1	0.8	0.42
2	0.9	0.63
3	1	0.79

$\Pr(X_2 = 2)$ wynosi:

(A) 0

(B) 0.1

(C) 0.2

(D) 0.3

(E) 0.4

Zadanie 9.

Niech:

- N oznacza liczbę roszczeń z jednego wypadku ubezpieczeniowego, zaś:
- $T_1, T_2, ..., T_N$ oznacza czas, jaki upływa od momentu zajścia wypadku do zgłoszenia roszczenia odpowiednio 1-go, 2-go,…, N-tego (numeracja roszczeń od 1-go do N-tego jest całkowicie przypadkowa, nie wynika więc z chronologii ich zgłaszania)

Załóżmy, że:

- zmienne losowe $N, T_1, T_2, T_3, ...$ są niezależne,
- zmienne losowe $T_1, T_2, T_3, ...$ mają identyczny rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej 1 (jednostką pomiaru czasu jest miesiąc)
- zmienna losowa N ma rozkład logarytmiczny dany wzorem:

$$\Pr(N = k) = \frac{1}{-\ln(1-c)} \frac{c^k}{k}, \quad k = 1,2,3,... \qquad \text{z parametrem } c \in (0,1).$$

Niech A oznacza zdarzenie, iż w ciągu pierwszych 2 miesięcy od zajścia wypadku zgłoszono dokładnie jedno roszczenie, a więc iż:

- dokładnie jedna liczba ze zbioru liczb $\{T_1, T_2, ..., T_N\}$, jest mniejsza lub równa 2.

Wartość oczekiwana liczby roszczeń z tego wypadku, a więc:

$$E(N|A)$$

wynosi:

(A) $\dfrac{c}{e^2 - c}$

(B) $\dfrac{e^2 - c}{ec}$

(C) $\dfrac{e^2 + c}{e^2 - c}$

(D) $\dfrac{e^2}{e^2 - c}$

(E) $\dfrac{e^2 - c}{c}$

Zadanie 10.
W pewnym ubezpieczeniu mamy do czynienia z ciągłym, liniowym wzrostem liczby ryzyk w portfelu, co wyraża założenie, iż zmienna $T \in (0,1)$ wyrażająca moment zajścia losowo wybranej szkody z tego portfela w ciągu roku (o ile oczywiście do szkody dojdzie) ma rozkład dany gęstością:

- $f_T(t) = \frac{8}{10} + \frac{4}{10}t$.

Niech D oznacza czas likwidacji szkody (odstęp w czasie od momentu zajścia szkody do jej likwidacji, wyrażony w latach). Zmienna ta ma rozkład jednostajny na odcinku $(0, 1)$.

Zakładamy że zmienne losowe T oraz D są niezależne. Oczekiwany czas likwidacji dla szkody do której doszło w ciągu roku, i która pozostaje nie-zlikwidowana na koniec tego roku, a więc:

$$\mathrm{E}(D|T + D > 1)$$

wynosi:

(A) 19/32 roku

(B) 9/16 roku

(C) 5/8 roku

(D) 21/32 roku TAK

(E) 3/4 roku

Egzamin dla Aktuariuszy z 6 kwietnia 2009 r.

Matematyka ubezpieczeń majątkowych

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ : .... K L U C Z   O D P O W I E D Z I ....

~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	B	
2	C	
3	A	
4	C	
5	B	
6	A	
7	B	
8	C	
9	D	
10	D	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.
♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.