Zadanie 1.

Załóżmy, że X_1, X_2, X_3, X_4 są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie Poissona z wartością oczekiwaną λ równą 10.
Obliczyć $v = \mathrm{var}(X_3 + X_4 \mid X_1 + X_2 + X_3 = 9)$.

(A) $v = 10$

(B) $v = 20$

(C) $v = 12$

(D) $v = 13$

(E) $v = 15$

Zadanie 2.

Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi każda z rozkładu wykładniczego o wartości oczekiwanej 2.
Niech $U = X + Y$ i $V = X - Y$.
Wtedy prawdziwe jest następujące zdanie.

(A) $P(U \in (0,2) \wedge V < 0) = 1 - 2e^{-1}$

(B) $P(U \in (0,2) \wedge V > 0) = \frac{1}{2} - e^{-1}$

(C) $P(U \in (0,2) \wedge V \in (0,2)) = 1 - e^{-1}$

(D) $P(U \in (0,2) \wedge V > 0) = \frac{1}{2} - e^{-1} - \frac{1}{2}e^{-2}$

(E) $P(V \in (0,2)) = 1 - e^{-1}$

Zadanie 3.

Rozważamy łańcuch Markowa $X_1, X_2,...$ na przestrzeni stanów $\{1,2,3\}$ o macierzy przejścia

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

(gdzie $P_{ij} = \Pr(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$ dla $i, j = 1,2,3$). Załóżmy, że rozkład początkowy łańcucha jest wektorem

$$\pi = \left[\frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{1}{3}\right],$$

(gdzie $\pi_i = \Pr(X_1 = i)$ dla $i = 1,2,3$).
Oblicz $p = \Pr(X_1 = 1 \mid X_2 \neq 1 \wedge X_3 \neq 1)$.

(A) $p = \frac{1}{7}$

(B) $p = \frac{1}{8}$

(C) $p = \frac{1}{4}$

(D) $p = \frac{1}{9}$

(E) $p = \frac{1}{12}$

Zadanie 4.

W urnie znajduje się 16 kul, z których 8 jest białych i 8 czarnych. Losujemy bez zwracania 6 kul, a następnie z pozostałych 5 kul. Niech S_2 oznacza liczbę kul białych uzyskaną w drugim losowaniu. Oblicz $VarS_2$

(A) 1

(B) $\frac{11}{12}$

(C) $\frac{6}{12}$

(D) $\frac{7}{12}$

(E) $\frac{8}{12}$

Zadanie 5.

Zmienna losowa X ma rozkład Weibulla o gęstości

$$p_\theta(x) = \begin{cases} 2\theta x \exp(-\theta x^2) & gdy \;\; x > 0 \\ 0 & gdy \;\; x \le 0 \end{cases},$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Statystyk nie obserwuje zmiennej X, uzyskuje tylko informację, gdy zmienna X przekroczy wartość 1, a mianowicie obserwuje zmienną Y równą $X - 1$, gdy zmienna X jest większa niż 1. W wyniku takiej obserwacji uzyskuje prostą próbę losową $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{10}$. Na podstawie tych danych weryfikuje hipotezę $H_0 : \theta \le 3$ przy alternatywie $H_1 : \theta > 3$. Test jednostajnie najmocniejszy na poziomie istotności 0,05 odrzuca hipotezę H_0, gdy spełniona jest nierówność

(A) $\sum_{i=1}^{10} (Y_i + 1)^2 > 5{,}2351$

(B) $\sum_{i=1}^{10} (Y_i + 1)^2 > 15{,}2351$

(C) $\sum_{i=1}^{10} (Y_i + 1)^2 < 1{,}8085$

(D) $\sum_{i=1}^{10} (Y_i + 1)^2 < 11{,}8085$

(E) $\sum_{i=1}^{10} (Y_i + 1)^2 < 10{,}6567$

Zadanie 6.

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o identycznym rozkładzie o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{gdy } x \in (0,1) \\ 0 & \text{gdy } x \notin (0,1) \end{cases},$$

Niech $U_n = \left(X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n\right)^{\frac{1}{n}}$. Wtedy

(A) $\lim_{n \to +\infty} P\left(U_n \le e^{-2}\right) = 1$

(B) $\lim_{n \to +\infty} P\left(\left(U_n - e^{-2}\right)\sqrt{n} < 4e^{-2}\right) = 0{,}977$

(C) $\lim_{n \to +\infty} P\left(\left(U_n - e^{2}\right)\sqrt{n} < 4e^{2}\right) = 0{,}977$

(D) $\lim_{n \to +\infty} P\left(\left(U_n - e^{-2}\right)\sqrt{n} > 8e^{-4}\right) = 0{,}023$

(E) $\lim_{n \to +\infty} P\left(U_n \ge e^{-2}\right) = 1$

Zadanie 7.

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie wykładniczym o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & \text{gdy} \quad x > 0 \\ 0 & \text{gdy} \quad x \le 0. \end{cases}$$

Niech N będzie zmienną losową, niezależną od $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$, o rozkładzie ujemnym dwumianowym $P(N = n) = \frac{\Gamma(r+n)}{\Gamma(r)n!} p^r (1-p)^n$ dla $n = 0,1,2,\ldots$, gdzie $r>0$ i $p \in (0;1)$ są ustalonymi parametrami. Niech

$$Z_N = \begin{cases} \min(X_1, X_2, \ldots, X_N) & gdy \;\; N > 0 \\ 0 & gdy \;\; N = 0. \end{cases}$$

Oblicz $E(NZ_N)$ i $Var(NZ_N)$.

(A) $E(NZ_N) = \frac{1}{2}$ i $Var(NZ_N) = \frac{1}{4}$

(B) $E(NZ_N) = \frac{1-p^r}{2}$ i $Var(NZ_N) = \frac{1-p^r}{4}$

(C) $E(NZ_N) = \frac{1-p^r}{2}$ i $Var(NZ_N) = \frac{1-p^{2r}}{4}$

(D) $E(NZ_N) = \frac{r(1-p)}{2p}$ i $Var(NZ_N) = \frac{r(1-p)}{4p^2}$

(E) $E(NZ_N) = \frac{1-p^r}{2}$ i $Var(NZ_N) = \frac{1-p^{2r}}{2}$.

Zadanie 8.

Każda ze zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots, X_{20}$ ma rozkład normalny z nieznaną wartością oczekiwaną m_1 i wariancją 1, a każda ze zmiennych losowych $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{20}$ rozkład normalny z nieznaną wartością oczekiwaną m_2 i wariancją 9. Założono, że wszystkie zmienne losowe są niezależne i wyznaczono, przy tych założeniach, test oparty na ilorazie wiarogodności dla testowania hipotezy $H_0 : m_1 = m_2$ przy alternatywie $H_1 : m_1 > m_2$ na poziomie istotności 0,1.
W rzeczywistości założenie to nie jest spełnione:

- co prawda pary zmiennych $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots, (X_n, Y_n)$ są niezależne, ale
- X_i, Y_i są zależne i współczynnik korelacji $Corr(X_i, Y_i) = \frac{1}{2}$ dla $i = 1,2,\ldots,20$.

Najmniejsza wartość różnicy $m_1 - m_2$ przy której faktyczna moc testu wynosi co najmniej 0,9 jest równa

(A) 1,66

(B) 1,76

(C) 2,04

(D) 2,14

(E) 2,57

Zadanie 9.

Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_n$, $n>2$, są niezależne i $EX_i = m$ oraz $VarX_i = \frac{m^2}{i}$, $i = 1,2,\ldots,n$, gdzie m jest nieznanym parametrem rzeczywistym. Niech $\tilde{m}$ będzie estymatorem parametru m minimalizującym błąd średniokwadratowy w klasie estymatorów postaci

$$\hat{m} = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i ,$$

gdzie a_i, $i = 1,2,\ldots,n$, są liczbami rzeczywistymi. Wtedy współczynniki a_i są równe

A) $a_i = \frac{1}{n}$, $i = 1,2,\ldots,n$

(B) $a_i = \frac{1}{n+1}$, $i = 1,2,\ldots,n$

(C) $a_i = \frac{2i}{n(n+1)}$, $i = 1,2,\ldots,n$

(D) $a_i = \frac{2i}{n^2+n+2}$, $i = 1,2,\ldots,n$

(E) $a_i = \frac{2i}{n^2+n-2}$, $i = 1,2,\ldots,n$

Zadanie 10.

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n>5, będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na przedziale $(0,\theta)$, gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Wyznaczamy przedział ufności dla parametru θ postaci

$$[2X_{3:n}, 2X_{n-2:n}],$$

gdzie $X_{k:n}$ oznacza k-tą statystykę pozycyjną z próby $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Dla jakiej najmniejszej liczebności próby losowej n zachodzi

$$P_\theta(\theta \in [2X_{3:n}, 2X_{n-2:n}]) \geq 0{,}9$$

(A) 8

(B) 9

(C) 10

(D) 11

(E) 12

Egzamin dla Aktuariuszy z 15 grudnia 2008 r.

Prawdopodobieństwo i statystyka

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : ....
Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	C	
2	B	
3	B	
4	B	
5	D	
6	B	
7	C	
8	A	
9	D	
10	D	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.
♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.