Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

XLVIII Egzamin dla Aktuariuszy z 15 grudnia 2008 r.

Część I

Matematyka finansowa

WERSJA TESTU A

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej:

....

Czas egzaminu: 100 minut

1. Na rynku dostępna jest europejska opcja kupna na akcję spółki A. Bieżąca cena akcji spółki A wynosi $S_0 = 200$ PLN. Przyjmujemy dwa scenariusze rozwoju rynku finansowego:

- scenariusz 1: po roku cena akcji spółki A wzrośnie o 10%
- scenariusz 2: po roku cena akcji spółki A spadnie o 15%.

Inwestor zajmuje długą pozycję w europejskiej opcji kupna wystawionej na akcję spółki A o cenie wykonania równej S_0 i okresie do wykonania równym 1 rok. W celu osłony pozycji inwestor stosuje strategie zabezpieczającą *delta hedging* polegającą na stworzeniu w chwili t=0 portfela, który replikuje wypłatę z opcji w chwili wykonania.

Portfel replikujący składa się z:

- akcji spółki A w ilości Δ_0 (zakładamy idealną podzielność aktywów)
- instrumentu wolnego od ryzyka o wartości w chwili t=0 równej B_0.

Instrument wolny od ryzyka zarabia w skali roku stopę 6%. Zakładamy, że akcja spółki A nie wypłaca dywidendy.

Wartość B_0 instrumentu wolnego od ryzyka wynosi (podaj najbliższą wartość):

A) – 83.02 PLN (krótka pozycja: inwestor pożycza instrument)

B) – 64.15 PLN (krótka pozycja: inwestor pożycza instrument)

C) 64.15 PLN (długa pozycja: inwestor nabywa instrument)

D) 80.00 PLN (długa pozycja: inwestor nabywa instrument)

E) 83.02 PLN (długa pozycja: inwestor nabywa instrument)

Wskazówka:

Mówimy, że portfel replikuje wypłatę z opcji, jeśli jego wartość jest równa wypłacie z opcji w dowolnym momencie i dla dowolnego scenariusza rozwoju rynku finansowego. Przyjmujemy założenia rynku doskonałego i zupełnego.

2. Na rynku dostępne są europejskie opcje kupna i sprzedaży wystawione na ten sam instrument bazowy o cenach wykonania X_1, X_2, X_3 (gdzie $X_1 < X_2 < X_3$) z okresem do wykonania równym T. Poniższa tabela zawiera obecne ($t = 0$) koszty zajęcia pozycji w opcjach:

Koszt opcji	Cena wykonania		
	$\boldsymbol{X_1}$	$\boldsymbol{X_2}$	$\boldsymbol{X_3}$
Opcja kupna	c_1	c_2	c_3
Opcja sprzedaży	p_1	p_2	p_3

Inwestor zajmuje pozycje w opcjach w chwili t=0. Funkcja wypłaty inwestora (uwzględniająca początkowe koszty zajęcia pozycji) w zależności od ceny instrumentu bazowego w momencie wykonania opcji wyraża się wzorem:

$$F(S_T) = \begin{cases} -(X_1 - S_T) + (p_1 - 2c_2 + 4c_3)\, e^{0.06\,T} & gdy \quad S_T < X_1 \\ (p_1 - 2c_2 + 4c_3)\, e^{0.06\,T} & gdy \quad X_1 \le S_T < X_2 \\ 2(S_T - X_2) + (p_1 - 2c_2 + 4c_3)\, e^{0.06\,T} & gdy \quad X_2 \le S_T < X_3 \\ -2S_T - 2X_2 + 4X_3 + (p_1 - 2c_2 + 4c_3)\, e^{0.06\,T} & gdy \quad S_T \ge X_3 \end{cases}$$

Gdzie S_T jest ceną instrumentu bazowego w momencie wykonania opcji. Wolna od ryzyka stopa procentowa wynosi 6% (zakładamy kapitalizację ciągłą).

Podaj strategie generującą funkcję wypłaty F:

A) Dwie długie pozycje w opcji kupna o cenie wykonania X_1, cztery krótkie pozycje w opcji sprzedaży o cenie wykonania X_2, jedna krótka pozycja w opcji sprzedaży o cenie wykonania X_3.

B) Długa pozycja w opcji sprzedaży o cenie wykonania X_1, dwie krótkie pozycje w opcji kupna o cenie wykonania X_2, cztery długie pozycje w opcji kupna o cenie wykonania X_3.

C) Krótka pozycja w opcji sprzedaży o cenie wykonania X_1, dwie długie pozycje w opcji kupna o cenie wykonania X_2, cztery krótkie pozycje w opcji kupna o cenie wykonania X_3.

D) Dwie długie pozycje w opcji kupna o cenie wykonania X_1, dwie krótkie pozycje w opcji sprzedaży o cenie wykonania X_2, dwie długie pozycje w opcji sprzedaży o cenie wykonania X_3.

E) Cztery długie pozycje w opcji kupna o cenie wykonania X_1, dwie krótkie pozycje w opcji kupna o cenie wykonania X_2, jedna długa pozycja w opcji sprzedaży o cenie wykonania X_3.

3. 1 stycznia 2009 r. Skarb Państwa emituje dwie obligacje: A i B, obie o tym samym nominale. Obligacje A i B wygasają w roku 2013 i płacą kupon 8%. Ponadto 1 stycznia 2011 (nie jest to moment płatności kuponu) jej posiadacz ma możliwość konwersji, na zasadach jeden za jeden, obligacji B na obligację z 9% kuponem i o tym samym nominale, wygasającą w roku 2017. Niech $P_A(0)$ i $P_B(0)$ oznaczają ceny obligacji A i B w momencie emisji. Wtedy:

A) $P_A(0) > P_B(0)$
B) $P_A(0) \geq P_B(0)$
C) $P_A(0) < P_B(0)$
D) $P_A(0) \leq P_B(0)$
E) Podane informacje nie pozwalają na udzielenie odpowiedzi.

4. W jednookresowym modelu wyceny obligacji, dostępne są 4 obligacje zerokuponowe o nominale 1, które wygasają w chwilach 1, 2, 3 i 4, odpowiednio. Ich ceny w chwili 0 wynoszą odpowiednio: $P(0,1) = 0.9$, $P(0,2) = 0.81$, $P(0,3) = 0.729$, $P(0,4) = 0.684$. Wiadomo, że w chwili 1 wystąpi jeden z 3 możliwych stanów rynku: $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Ceny obligacji w chwili 1, w każdym ze stanów dane są w tabeli:

	ω_1	ω_2	ω_3
$P(1,2)$	0.880	0.900	0.920
$P(1,3)$	0.770	0.805	0.860
$P(1,4)$	0.700	0.750	x

Żadne transakcje nie są możliwe pomiędzy chwilami 0 i 1. Wartość x, przy której model ten jest wolny od arbitrażu wynosi (podaj najbliższą wartość):

A) 0.76
B) 0.80
C) 0.84
D) 0.88
E) 0.92

5. Renta wieczysta płaci na koniec roku n = 1, 2, … następujące kwoty

- $\frac{1+\left(-1\right)^{n+1}}{n}$ w latach nieparzystych,
- $\frac{2}{n+1}$ w latach parzystych.

Roczna stopa dyskontowa wynosi i = 4%. Wartość obecna tej renty wynosi (podaj najbliższą wartość).

A) 6.0
B) 6.1
C) 6.2
D) 6.3
E) 6.4

6. Fundusz inwestycyjny założono w chwili t = 0 z wpłatą początkową równą 1. Stan funduszu w chwili t wynosi A(t). Na rachunek dokonywane są w sposób ciągły wpłaty z roczną intensywnością $a(t)=\dfrac{2}{1+\dfrac{1}{A(t)}}$. Ciągła intensywność oprocentowania środków na rachunku wynosi $\delta_t=\dfrac{1}{1+A(t)}$. Ile wynosi stan funduszu w chwili t = 1?

Odpowiedź (podaj najbliższą wartość):

A) 2.8
B) 2.9
C) 3.0
D) 3.1
E) 3.2

7. Trzy osoby biorą z banku kredyty w wysokości 100 000 każdy, spłacane za pomocą rat płatnych na koniec każdego roku przez najbliższe 15 lat. Każda z osób ma inny plan spłaty kredytu. Osoba pierwsza spłaca kredyt za pomocą rat postaci: P, P-500, P-1000,..., P-7000 (każda rata jest o 500 mniejsza od poprzedniej). Osoba druga spłaca kredyt za pomocą rat postaci: Q, 2*Q, 3*Q,...,15*Q. Osoba trzecia spłaca kredyt za pomocą rat postaci: R, 1,1*R, $1{,}1^2$*R, ...,$1{,}1^{14}$*R. Roczna efektywna stopa procentowa wynosi i = 7%. Ile wynoszą sumaryczne odsetki zapłacone przez wszystkich trzech kredytobiorców w całym okresie spłacania kredytów (podaj najbliższą wartość)?

A) 235 730
B) 235 760
C) 235 790
D) 235 820
E) 235 850

8. Inwestor kupił w dniu emisji dwie obligacje, 10 letnią i 12 letnią. Wartość wykupu każdej obligacji wynosi 10 000. Każda obligacja wypłaca kupon o wartości 800 co dwa lata, począwszy od końca drugiego roku. Inwestor sfinansował 80% wartości zakupu obligacji za pomocą kredytu, natomiast pozostałą część opłacił z własnych środków. Odsetki otrzymane z obligacji są reinwestowane w funduszu.

Po trzech latach inwestor sprzedaje obie obligacje, wycofuje środki z funduszu i spłaca kredyt w całości wraz z należnymi odsetkami.

Wiedząc, że:

- cena zakupu obligacji została ustalona przy stopie procentowej - 6%,
- cena sprzedaży obligacji została ustalona przy stopie procentowej – 5%,
- stopa zwrotu funduszu, w którym reinwestowane są środki otrzymane z wypłaconych kuponów obligacji wynosi – 7%,
- oprocentowanie kredytu wynosi – 8%,

oblicz efektywną (roczną) stopę zwrotu z zainwestowanych środków własnych. Podaj najbliższą wartość:

A) 7.8%
B) 8.1%
C) 8.4%
D) 8.7%
E) 9.0%

9. Kredyt o wartości A będzie spłacany w formie renty odroczonej *a* płacącej 1 na koniec kolejnych lat. Wiadomo ponadto, że:

$$\lim_{i\to\infty} \mathrm{d(a)} = 11$$

$$\lim_{i\to 0} \mathrm{d(a)} = 20.5$$

gdzie *d(a)* oznacza *duration* renty *a*, natomiast *i* oznacza stopę procentową.

Kredyt o wartości B będzie spłacany w formie renty 10-letniej *b*, płatnej na koniec kolejnych lat, przy czym pierwsza rata wynosi 15, a każda następna jest o 1 mniejsza. Pierwsze płatności rent *a* i *b* odbywają się w tym samym momencie.

Oblicz ile wynosi suma A + B, przy założeniu, że stopa procentowa jest równa 8%.

Podaj najbliższą wartość.

A) 39

B) 41

C) 43

D) 45

E) 47

10. Kredytobiorca spłaca pożyczkę za pomocą 10 rosnących rat płatnych na końcu każdego roku w wysokości 1, 2, 3, ... 10, począwszy od końca pierwszego roku.

Wyznacz sumaryczną wielkość kapitału pożyczki spłaconego w ratach 5, 6 i 7.

Wskaż odpowiedni wzór.

A) $[v^4 \cdot a_{\overline{4|}} \cdot (11 \cdot i + 1) - 3] / i$

B) $[v^4 \cdot \ddot{a}_{\overline{3|}} \cdot (11 + i) - 3] / i$

C) $[v^3 \cdot a_{\overline{3|}} \cdot (11 \cdot i + 1) - 3] / i$

D) $[v^3 \cdot \ddot{a}_{\overline{3|}} \cdot (11 + i) - 3] / i$

E) $[v^3 \cdot a_{\overline{4|}} \cdot (11 \cdot i + 1) - 3] / i$

Egzamin dla Aktuariuszy z 15 grudnia 2008 r.

Matematyka finansowa

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko: ....

Pesel: ....

OZNACZENIE WERSJI TESTU ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	B	
2	C	
3	D	
4	C	
5	A	
6	B	
7	B	
8	D	
9	A	
10	C	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.
♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.