

**Zadanie 1.**

Niech  $(X, Y)$  będzie dwuwymiarową zmienną losową, o wartości oczekiwanej  $(\mu_X, \mu_Y)$ , wariancji każdej ze współrzędnych równej  $\sigma^2$  oraz kowariancji równej  $\rho \cdot \sigma^2$ . Staramy się obserwować niezależne realizacje tej zmiennej, ale nie w pełni to wychodzi - czasem udaje się zaobserwować jedynie pierwszą lub jedynie drugą ze współrzędnych. Przyjmijmy ważne założenie, iż do „zgubienia” obserwacji (całkowitego, jej pierwszej współrzędnej, lub jej drugiej współrzędnej) dochodzi całkowicie niezależnie od wartości tych obserwacji.

Założmy, iż otrzymaliśmy próbkę, zawierającą 10 obserwacji wyłącznie pierwszej współrzędnej, 40 obserwacji całej pary, oraz 10 obserwacji wyłącznie drugiej współrzędnej. Niech teraz:

$\bar{X}$  oznacza średnią z próbki (50-ciu) obserwacji na zmiennej  $X$ ,

$\bar{Y}$  oznacza średnią z próbki (50-ciu) obserwacji na zmiennej  $Y$ ,

$\overline{X - Y}$  oznacza średnią z próbki (40-tu) obserwacji na różnicy zmiennych  $X - Y$ ;

oraz niech:

$(\bar{X} - \bar{Y})$  oraz  $\overline{X - Y}$  oznaczają dwa alternatywne estymatory różnicy  $(\mu_X - \mu_Y)$

Estymatory te mają jednakową wariancję o ile:

(A)  $\rho = 0$

(B)  $\rho = \frac{3}{9}$

(C)  $\rho = \frac{4}{9}$

(D)  $\rho = \frac{6}{9}$

(E)  $\rho = \frac{5}{9}$

**Zadanie 2.**

Niech dwuwymiarowa zmienna losowa ma gęstość:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2-x-y & \text{dla } (x,y) \in (0,1) \times (0,1) \\ 0 & \text{dla } (x,y) \notin (0,1) \times (0,1) \end{cases}$$

Niech  $U = \min\{X,Y\}$  i  $V = \max\{X,Y\}$ .

Wtedy

- (A) zmienne  $U$  i  $V$  są niezależne
- (B) gęstość zmiennej  $(U,V)$  jest równa  $g(u,v) = 4 - 2u - 2v$ , gdy  $0 < u < v < 1$
- (C) gęstość zmiennej  $(U,V)$  jest równa  $g(u,v) = (3-2v)(1,5-u)$ , gdy  $0 < u < v < 1$
- (D) gęstość zmiennej  $V$  jest równa  $h(v) = 2 - 3v^2$ , gdy  $0 < v < 1$
- (E)  $EV = \frac{3}{4}$

**Zadanie 3.**

Na początku doświadczenia w urnie I znajdują się 3 kule białe, zaś w urnie II - 3 kule czarne. Losujemy po jednej kuli z każdej urny - po czym kulę wylosowaną z urny I wrzucamy do urny II, a tę wylosowaną z urny II wrzucamy do urny I. Czynność tę powtarzamy wielokrotnie. Granica (przy  $n \rightarrow \infty$ ) prawdopodobieństwa, iż obie kule wylosowane w  $n$ -tym kroku są jednakowego koloru, wynosi:

(A)  $\frac{2}{3}$

(B)  $\frac{1}{2}$

(C)  $\frac{2}{5}$

(D)  $\frac{1}{3}$

(E)  $\frac{1}{4}$

**Zadanie 4.**

Niech  $X_1, X_2, \dots, X_n$  będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o identycznym rozkładzie jednostajnym na pewnym przedziale  $(a, b)$ ,  $a < b$ .

Współczynnik korelacji liniowej  $\text{Corr}\left(\min_{i=1, \dots, n} \{X_i\}, \max_{i=1, \dots, n} \{X_i\}\right)$  wynosi:

(A) 0

(B)  $\frac{1}{n}$

(C)  $\frac{2}{n+1}$

(D)  $\frac{n+1}{n^2+1}$

(E)  $\frac{1}{n^2}$

**Zadanie 5.**

Wiadomo, że liczby

0,38, 0,65, 0,72, 1,00

są niezależnymi realizacjami zmiennej losowej o rozkładzie jednostajnym o gęstości

$$f_{\theta}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} & \text{dla } 0 < x < \theta \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach,} \end{cases}$$

gdzie  $\theta > 0$  jest nieznanym parametrem. Zakładamy, że parametr  $\theta$  jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na przedziale  $[0,5, 2]$ .

Mediana rozkładu a posteriori, przy tych danych, jest równa

- (A) 1,250
- (B) 1
- (C) 0,627
- (D) 1,211
- (E) 1,155

**Zadanie 6.**

Założmy, że dysponujemy pojedynczą obserwacją  $X$  z rozkładu  $P \in \{P_0, P_1\}$ , gdzie  $P_0$  jest rozkładem normalnym  $N(0,4)$  i  $P_1$  jest rozkładem Laplace'a o gęstości

$$f(x) = \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{2}|x|}.$$

Rozważmy zadanie testowania hipotezy

$$H_0 : P = P_0$$

przeciw alternatywie

$$H_1 : P = P_1.$$

Wiadomo, że w zbiorze liczb większych od 2, do obszaru krytycznego testu najmocniejszego należą liczby z przedziału  $(3,8, +\infty)$ . Moc tego testu jest równa

- (A) 0,1371
- (B) 0,2447
- (C) 0,2036
- (D) 0,1224
- (E) 0,2036

**Zadanie 7.**

Niech  $X_1, X_2, \dots, X_n$  będą niezależnymi zmiennymi losowymi z tego samego rozkładu o dystrybuancie

$$F_\theta(x) = \begin{cases} 1 - 3^{-(x-\theta)} & \text{gdy } x > \theta \\ 0 & \text{gdy } x \leq \theta \end{cases}$$

gdzie  $\theta \geq 0$  jest nieznanym parametrem. Rozważamy jednostajnie najmocniejszy test hipotezy  $H_0: \theta = 0$  przy alternatywie  $H_1: \theta > 0$  na poziomie istotności 0,01.

W danym punkcie  $\theta_1 > 0$  funkcja mocy tego testu przyjmuje wartości większe lub równe 0,81 wtedy i tylko wtedy, gdy liczebność próbki  $n$  spełnia warunek

(A)  $n \geq \frac{4}{3\theta_1}$

(B)  $n \geq \frac{\log_3 100}{\theta_1}$

(C)  $n \geq \frac{4}{\theta_1}$

(D)  $n \geq \frac{\theta_1}{\log_3 100}$

(E)  $n \geq 4\theta_1$

**Zadanie 8.**

Niech  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  będą niezależnymi zmiennymi losowymi z tego samego rozkładu wykładniczego o wartości oczekiwanej 1. Niech  $N$  będzie zmienną losową o rozkładzie Poissona o wartości oczekiwanej 1 niezależną od zmiennych  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ . Niech

$$S_N = \begin{cases} \sum_{i=1}^N X_i & \text{gdy } N > 0 \\ 0 & \text{gdy } N = 0 \end{cases}$$

Wtedy gęstość rozkładu zmiennej  $S_N$  w punkcie  $s > 0$  jest równa

(A)  $e^{-s-1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{s^{n-1}}{(n-1)!n!}$

(B)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-sn-1}}{n!}$

(C)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-sn-1}}{(n-1)!n!}$

(D)  $e^{-s-1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!n!}$

(E) żadna z powyższych odpowiedzi

**Zadanie 9.**

Niech  $X_1, X_2, \dots, X_n, n > 2$ , będą niezależnymi zmiennymi losowymi z tego samego rozkładu geometrycznego, gdzie

$$P(X_i = k) = (k+1)p^2(1-p)^k \quad \text{gdy } k = 0, 1, 2, \dots,$$

a  $p \in (0, 1)$  jest nieznanym parametrem.

Rozważamy klasę estymatorów parametru  $p$  postaci

$$\hat{p} = \frac{a}{a + \sum_{i=1}^n X_i}.$$

Dobierz parametr  $a$  tak, by otrzymać estymator nieobciążony.

- A)  $a = 2n$
- (B)  $a = 2n - 1$
- (C)  $a = n$
- (D)  $a = n + 0,5$
- (E)  $a = n - 1$

**Zadanie 10.**

Niech  $X_1, X_2, \dots, X_6$  będą niezależnymi zmiennymi losowymi o identycznym rozkładzie Weibulla o gęstości

$$f_{\theta}(x) = \begin{cases} \frac{4}{\theta} x^3 \exp\left(-\frac{1}{\theta} x^4\right) & \text{gdy } x > 0 \\ 0 & \text{gdy } x \leq 0 \end{cases},$$

gdzie  $\theta > 0$  jest nieznanym parametrem. Niech  $\hat{\theta}$  oznacza estymator największej wiarygodności parametru  $\theta$ . Obliczyć

$$P_{\theta}\left(\left|\hat{\theta} - \theta\right| < 0,1\theta\right).$$

- (A) 0,1915
- (B) 0,2548
- (C) 0,0604
- (D) 0,1342
- (E) 0,0589

**Egzamin dla Aktuariuszy z 6 października 2008 r.****Prawdopodobieństwo i statystyka****Arkusz odpowiedzi\***

Imię i nazwisko : ..... KLUCZ ODPOWIEDZI.....  
Pesel .....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja ♦
1	E	
2	B	
3	C	
4	B	
5	D	
6	B	
7	C	
8	A	
9	B	
10	A	

\* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.