Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

XLVII Egzamin dla Aktuariuszy z 6 października 2008 r.

Część II

Matematyka ubezpieczeń życiowych

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej: ....

Czas egzaminu: 100 minut

Warszawa, 6 października 2008 r.

1. Niech x będzie liczbą całkowitą nieujemną oraz $u \in (0,1)$. Niech ponadto $p_{x+u}^{(UDD)}$ oznacza p_{x+u} obliczone przy założeniu UDD, natomiast $p_{x+u}^{(B)}$ niech oznacza p_{x+u} obliczone przy założeniu Balducciego.
   Wówczas zachodzi wzór

(A)
$$p_{x+u}^{(UDD)}\,p_{x+u}^{(B)} = \frac{p_x p_{x+1}(1-uq_{x+1})(1-uq_x)}{[1-(1-u)q_{x+1}][1-(1-u)q_x]}$$

(B)
$$p_{x+u}^{(UDD)}\,p_{x+u}^{(B)} = \frac{p_x^2(1-uq_{x+1})[1-(1-u)q_x]}{[1-(1-u)q_{x+1}](1-uq_x)}$$

(C)
$$p_{x+u}^{(UDD)}\,p_{x+u}^{(B)} = \frac{p_{x+1}^2(1-uq_{x+1})[1-(1-u)q_x]}{[1-(1-u)q_{x+1}](1-uq_x)}$$

(D)
$$p_{x+u}^{(UDD)}\,p_{x+u}^{(B)} = \frac{p_x p_{x+1}(1-uq_{x+1})[1-(1-u)q_x]}{[1-(1-u)q_{x+1}](1-uq_x)}$$

(E)
$$p_{x+u}^{(UDD)}\,p_{x+u}^{(B)} = \frac{(1-uq_{x+1})[1-(1-u)q_x]}{[1-(1-u)q_{x+1}](1-uq_x)}$$

2. Niech

$$\Delta\bar{A}_x = \bar{A}_{x+\Delta x} - \bar{A}_x$$

oraz podobnie niech

$$\Delta\bar{a}_x = \bar{a}_{x+\Delta x} - \bar{a}_x.$$

Wówczas zachodzi następujące przybliżenie (tym lepsze im mniejsze jest Δx przy ustalonym x)

(A)

$$\frac{\Delta\bar{A}_x - {}_{\Delta x}q_x}{\delta\Delta\bar{a}_x + \Delta x} \approx \bar{P}(\bar{A}_x)$$

(B)

$$\frac{\Delta\bar{A}_x + {}_{\Delta x}q_x}{\Delta\bar{a}_x + \Delta x} \approx \bar{P}(\bar{A}_x)$$

(C)

$$\frac{\Delta\bar{A}_x + {}_{\Delta x}q_x}{\delta\Delta\bar{a}_x - \Delta x} \approx \bar{P}(\bar{A}_x)$$

(D)

$$\frac{\Delta\bar{A}_x - {}_{\Delta x}q_x}{\Delta\bar{a}_x - \Delta x} \approx \bar{P}(\bar{A}_x)$$

(E)

$$\frac{\Delta\bar{A}_x + {}_{\Delta x}q_x}{\delta\Delta\bar{a}_x + \Delta x} \approx \bar{P}(\bar{A}_x)$$

3. Niech Y oznacza wartość obecną renty życiowej dla (x), która wypłaca 1 zł na początku roku, co rok, aż do śmierci, obliczoną przy technicznej intensywności oprocentowania $\delta > 0$. Podobnie niech ${}^2Y$ oznacza wartość obecną tego samego strumienia płatności, ale obliczoną przy intensywności oprocentowania 2δ. Oto realizacje zmiennych Y oraz ${}^2Y$:

$$Y = 11{,}4773 \quad , \quad {}^2Y = 7{,}97483 .$$

Obliczyć realizację zmiennej $K(x)$.

(A) 17

(B) 18

(C) 19

(D) 20

(E) 21

4. Roczna intensywność składki $\bar{P}(\bar{A}^{1}_{x:n})$ spełnia następujące równanie różniczkowe

(A)
$$\frac{\partial\, \bar{P}(\bar{A}^{1}_{x:n})}{\partial n} = \bar{A}^{1}_{x:n}\left(\bar{P}\left(\bar{A}_{x:n}\right) + \delta\right)\left(\mu_{x+n} - \bar{P}\left(\bar{A}_{x:n}\right)\right)$$

(B)
$$\frac{\partial\, \bar{P}(\bar{A}^{1}_{x:n})}{\partial n} = \bar{A}^{1}_{x:n}\left(\bar{P}\left(\bar{A}_{x:n}\right) + \delta\right)\left(\mu_{x+n} - \bar{P}(\bar{A}^{1}_{x:n})\right)$$

(C)
$$\frac{\partial\, \bar{P}(\bar{A}^{1}_{x:n})}{\partial n} = A_{x:\overset{1}{n}}\left(\bar{P}\left(\bar{A}_{x:n}\right) + \delta\right)\left(\mu_{x+n} - \bar{P}\left(\bar{A}_{x:n}\right)\right)$$

(D)
$$\frac{\partial\, \bar{P}(\bar{A}^{1}_{x:n})}{\partial n} = A_{x:\overset{1}{n}}\left(\bar{P}(\bar{A}^{1}_{x:n}) + \delta\right)\left(\mu_{x+n} - \bar{P}(\bar{A}^{1}_{x:n})\right)$$

(E)
$$\frac{\partial\, \bar{P}(\bar{A}^{1}_{x:n})}{\partial n} = A_{x:\overset{1}{n}}\left(\bar{P}\left(\bar{A}_{x:n}\right) + \delta\right)\left(\mu_{x+n} - \bar{P}(\bar{A}^{1}_{x:n})\right)$$

5. W rozważanej populacji śmiertelnością rządzi prawo Weibulla:

$\mu_t = 7t$

dla $t > 0$. Rozpatrujemy ubezpieczenie ciągłe 30-letnie ogólnego typu dla (0), które będzie opłacane za pomocą ciągłej renty życiowej składek netto ze stałą roczną intensywnością:

$\pi(t) = const = \bar{P}.$

Natomiast wysokość świadczenia śmiertelnego $c(t)$ związana jest z poziomem rezerwy netto $V(t)$ wzorem:

$c(t) - V(t) = const = s.$

Techniczna intensywność oprocentowania wynosi $\delta = 0{,}05.$

Wówczas $\bar{P}$ oraz s spełniają równanie

(A) $s = 0{,}0115\bar{P}$

(B) $s = 0{,}0120\bar{P}$

(C) $s = 0{,}0125\bar{P}$

(D) $s = 0{,}0130\bar{P}$

(E) $s = 0{,}0135\bar{P}$.

6. Rozważamy demografię Weibulla z funkcją natężenia wymierania

$\mu_{x+t} = k(x+t)$,

gdzie $k > 0$ jest parametrem. Rozważmy ubezpieczenie ciągłe ogólnego typu dla (x). Wiadomo, że dla $t \in (10,25)$ mamy
$V(t) = const = V, c(t) = const = c$,
przy czym $c \neq V$. Dane są ponadto:
$\pi(12) = 0{,}1$; $\pi(16) = 0{,}2$.
Obliczyć $\pi(14)$.

(A) $\pi(14) = 0{,}1317$

(B) $\pi(14) = 0{,}1378$

(C) $\pi(14) = 0{,}1439$

(D) $\pi(14) = 0{,}1500$

(E) $\pi(14) = 0{,}1561$.

7. Za składkę jednorazową brutto SJB osoba w wieku (65) kupuje ubezpieczenie emerytalne typu Emer(n), które działa w następujący sposób:

-wypłacana jest emerytura dożywotnia w postaci renty życiowej ciągłej ze stałą roczną intensywnością $E(n)$,

- ponadto jeśli ubezpieczony umrze w wieku $65+t$ gdzie $t \in (0,n)$ to wyznaczeni uposażeni otrzymają natychmiast jednorazowe świadczenie w wysokości $SJB(n-t)/n$. Parametr n może być wybrany z przedziału $(0,5)$ w momencie zakupu polisy. Składka jednorazowa netto SJN jest o 7% mniejsza od składki brutto SJB. Wówczas pochodna

$$\frac{\partial E(n)}{\partial n}$$

wynosi

(A)

$$\frac{\partial E(n)}{\partial n} = -\frac{0{,}93SJB \cdot (\bar{I}\bar{A})_{65:n}}{n^2 \bar{a}_{65}}$$

(B)

$$\frac{\partial E(n)}{\partial n} = -\frac{SJB \cdot (\bar{I}\bar{A})_{65:n}}{n^2 \bar{a}_{65}}$$

(C)

$$\frac{\partial E(n)}{\partial n} = -\frac{SJB \cdot (\bar{I}\bar{A})_{65:n}}{0{,}93n^2 \bar{a}_{65}}$$

(D)

$$\frac{\partial E(n)}{\partial n} = -\frac{SJB \cdot (\bar{I}\bar{A})_{65:n}}{n \bar{a}_{65}}$$

(E)

$$\frac{\partial E(n)}{\partial n} = -\frac{0{,}93SJB \cdot (\bar{I}\bar{A})_{65:n}}{n \bar{a}_{65}}$$

8. Ubezpieczenie dla grupy 7 osób działa w ten sposób, że w momencie każdej śmierci wypłaca się po 1 zł każdej osobie przeżywającej (tak więc np. w momencie pierwszej śmierci w grupie ubezpieczyciel wypłaca 6 zł, a w momencie przedostatniej wypłaca 1 zł). Zakładamy, że jednoczesna śmierć dwóch lub więcej osób nie jest możliwa i że ich życia są niezależne.

Cztery spośród tych osób należą do populacji wykładniczej ze średnią trwania życia 100. Pozostałe trzy osoby należą do populacji wykładniczej ze średnią trwania życia 60. Przyjmując techniczną intensywność oprocentowania na poziomie $\delta = 0{,}03$ obliczyć składkę jednorazową netto SJN za to ubezpieczenie.

Wybierz odpowiedź najbliższą.

(A) 9,426

(B) 9,526

(C) 9,626

(D) 9,726

(E) 9,826.

9. Rozważamy emeryturę małżeńską dla męża (65) i żony (60), przy czym on jest wylosowany z populacji de Moivre'a z wiekiem granicznym 105 a ona jest wybrana z populacji de Moivre'a z wiekiem granicznym 120. Emeryturę będą otrzymywać w formie renty życiowej ciągłej. Póki żyją oboje roczna intensywność renty wynosi 18000 zł; po pierwszej śmierci intensywność emerytury dla owdowiałej osoby wynosi 12000 zł.

Techniczna intensywność oprocentowania wynosi $\delta = 0.$

Obliczyć składkę jednorazową netto SJN.

Wybrać wartość najbliższą.

(A) 507000 zł

(B) 517000 zł

(C) 527000 zł

(D) 537000 zł

(E) 547000 zł.

10. x-latek , wylosowany z populacji de Moivre'a z wiekiem granicznym ω, zaczyna odkładać na przyszłą emeryturę z intensywnością 1 na rok w formie renty życiowej ciągłej. Emeryturę zacznie pobierać w wieku x+z, również z intensywnością 1, aż do śmierci (o ile dożyje wieku x+z). Z aktuarialnej zasady równoważności (netto) wynika, że z spełnia równanie:

(A)
$e^{\delta(x+z-\omega)} + e^{\delta z}(1 + \delta x - \delta\omega) = 2 + 2\delta(x - z + \omega)$

(B)
$e^{\delta(x+z-\omega)} + e^{\delta z}(1 - \delta x + \delta\omega) = 2 + 2\delta(x + z - \omega)$

(C)
$e^{\delta(x+z-\omega)} + e^{\delta z}(1 + \delta x - \delta\omega) = 2 + 2\delta(x + z + \omega)$

(D)
$e^{\delta(x+z-\omega)} + e^{\delta z}(1 + \delta x + \delta\omega) = 2 + 2\delta(x + z - \omega)$

(E)
$e^{\delta(x+z-\omega)} + e^{\delta z}(1 + \delta x - \delta\omega) = 2 + 2\delta(x + z - \omega)$

XLVII Egzamin dla Aktuariuszy z 6 października 2008 r.

Matematyka ubezpieczeń życiowych

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : ....

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	D	
2	B	
3	A	
4	E	
5	C	
6	D	
7	B	
8	C	
9	A	
10	E	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.