Zadanie 1.

Dla dowolnej zmiennej losowej *X* o wartości oczekiwanej μ, wariancji $\sigma^2 < \infty$ oraz momencie centralnym μ_{2k} rzędu $2k$ zachodzą nierówności (*typu Czebyszewa*):

$$\Pr\left(X > \mu + t \cdot \sigma\right) < \frac{1}{t^{2k}} \cdot \frac{\mu_{2k}}{\sigma^{2k}}. \qquad k = 1,2,..., \qquad t > 0.$$

Jeśli $\mu_4 < \infty$, wtedy istnieje taka liczba t^*, że:

- dla $t < t^*$ ściślejsze ograniczenie na prawdopodobieństwo $\Pr\left(X > \mu + t \cdot \sigma\right)$ otrzymujemy przyjmując $k = 1$,
- zaś dla $t > t^*$ ściślejsze ograniczenie otrzymujemy przyjmując $k = 2$.

Wiemy, że zmienna losowa *X* jest sumą czterech niezależnych zmiennych losowych o identycznych rozkładach:

- z zerową wartością oczekiwaną, wariancją równą 4, oraz momentem centralnym czwartego rzędu równym $7 \cdot 4^2$.

Liczba t^* dla zmiennej losowej *X* wynosi:

(A) 8

(B) 6

(C) 4

(D) 2

(E) 1

Zadanie 2.
X_1 i X_2 to dwa niezależne ryzyka o zbiorze możliwych wartości $\{0,1,2,...\}$. Znamy wartości dystrybuanty $F_1(x) = \Pr(X_1 \leq x)$ oraz $F_S(x) = \Pr(X_1 + X_2 \leq x)$ dla kilku pierwszych wartości *x*:

x	$F_1(x)$	$F_S(x)$
0	0.6	0.12
1	0.8	0.46
2	0.9	0.58
3	1	0.83

$\Pr(X_2 > 3)$ wynosi:

(A) 0

(B) 0.05

(C) 0.1

(D) 0.15

(E) 0.2

Zadanie 3.
Pewne ryzyko generuje szkody zgodnie z procesem Poissona z parametrem intensywności λ. O parametrze λ zakładamy, że jest on realizacją zmiennej losowej Λ o rozkładzie Gamma $(2,1)$. Niech $T(t)$ oznacza chwilę wystąpienia pierwszej szkody po momencie *t*.
$E(T(0)|T(0)>2)$ wynosi:

(A) 5

(B) $4\frac{1}{2}$

(C) 4

(D) $3\frac{1}{2}$

(E) 3

Zadanie 4.
W pewnym portfelu ryzyk liczba roszczeń ma rozkład Poissona z wartością oczekiwaną równą 5. Pojawiające się roszczenie z prawdopodobieństwem p jest oddalane, a z prawdopodobieństwem $q = 1 - p$ akceptowane. Roszczenie zaakceptowane skutkuje w odszkodowaniu, które jest pewną zmienną losową. Wartości odszkodowań mają ten sam rozkład. W procesie oddalania/akceptacji roszczeń kolejne decyzje są niezależne, nie zależą także od wartości roszczeń.

Jeśli funkcja generująca momenty łącznej wartości odszkodowań jest postaci:

$$M(t) = \exp\left[\frac{3t(10-t)}{(5-t)^2}\right], \qquad t < 5,$$

to prawdopodobieństwo oddalenia roszczenia p wynosi:

(A) $\frac{1}{5}$

(B) $\frac{2}{5}$

(C) $\frac{1}{2}$

(D) $\frac{3}{4}$

(E) $\frac{4}{5}$

Zadanie 5.
Proces nadwyżki jest złożonym procesem Poissona, z zerową nadwyżką początkową, ze stosunkowym narzutem bezpieczeństwa $\theta = 10\%$, oraz z rozkładem wartości szkody jednostajnym na przedziale (0,10). Wartość oczekiwana deficytu w momencie ruiny (o ile do ruiny dojdzie) jest równa:

(A) 4

(B) $3\frac{1}{3}$

(C) 3

(D) $2\frac{2}{3}$

(E) $2\frac{1}{2}$

Zadanie 6.
W modelu nadwyżki ubezpieczyciela z czasem dyskretnym składka należna za rok wynosi 4, a rozkład łącznej wartości szkód za *n*-ty rok W_n dany jest dla każdego *n* wzorem:

$$\Pr(W_n = k) = (k+1)\left(\frac{4}{10}\right)^2\left(\frac{6^2}{10}\right)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

gdzie $W_1, W_2, \dots$ są nawzajem niezależne.
W tym modelu współczynnik przystosowania (*adjustment coefficient*) *R* wynosi:

(A) $\ln\left(\frac{3+4\sqrt{2}}{4}\right)$

(B) $\ln\left(\frac{3+\sqrt{33}}{4}\right)$

(C) $\ln\left(\frac{2+\sqrt{30}}{6}\right)$

(D) $\ln\left(\frac{1+2\sqrt{2}}{3}\right)$

(E) $\ln\left(\frac{1+\sqrt{7}}{3}\right)$

Zadanie 7.

Liczba szkód dla jednego ryzyka ma rozkład warunkowy dany wzorem:

$$\Pr(N = k / \Lambda = \lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda},$$

z tą samą wartością λ dla danego ryzyka w kolejnych latach.

W populacji ryzyk rozkład parametru Λ jest rozkładem Gamma(α, β).

W roku 0 mieliśmy w portfelu *n* ryzyk przypadkowo wylosowanych z tej populacji, i wygenerowały one N_0 szkód.

W roku 1 nasz portfel liczy także *n* ryzyk, które wygenerowały N_1 szkód. Przy tym *m* spośród wszystkich *n* ryzyk to losowo wybrana podgrupa z portfela z roku 0, a pozostałe $(n-m)$ ryzyk dolosowano z populacji. Oczywiście *m* jest pewną liczbą ze zbioru $m \in \{0,1,2,\ldots,n\}$.

Wobec tego $\mathrm{E}\left[(N_1 - N_0)^2\right]$ wynosi:

(A) $\frac{\alpha}{\beta}\left\{2n + \frac{m}{\beta}\right\}$

(B) $2\frac{\alpha}{\beta}\left\{n + \frac{m}{\beta}\right\}$

(C) $2\frac{\alpha}{\beta}\left\{n + \frac{n}{\beta}\right\}$

(D) $\frac{\alpha}{\beta}\left\{2n + \frac{n-m}{\beta}\right\}$

(E) $2\frac{\alpha}{\beta}\left\{n + \frac{n-m}{\beta}\right\}$

Zadanie 8.

Wartość szkody Y ma rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej β^{-1}. Aproksymujemy zmienną Y za pomocą zmiennej $\widetilde{Y}$ o rozkładzie określonym na zbiorze liczb naturalnych z zerem, o własnościach:

$\Pr\left(\widetilde{Y} = k+1\right) = \Pr\left(\widetilde{Y} = k\right) \cdot \exp(-\beta)$ dla $k = 1, 2, 3, \ldots$, oraz:

$E\left(\widetilde{Y}\right) = E(Y)$.

Wtedy $\Pr\left(\widetilde{Y} = 0\right)$ wynosi:

(A) $1 - e^{-\beta}$

(B) $\dfrac{1 - e^{-\beta}}{\beta}$

(C) $1 - \dfrac{1 - e^{-\beta}}{\beta}$

(D) $\dfrac{e^{-\beta} - e^{-2\beta}}{\beta}$

(E) $1 - \dfrac{e^{-\beta} - e^{-2\beta}}{\beta}$

Zadanie 9.

Rozkład łącznej wartości szkód jest dla pewnego portfela ryzyk złożonym rozkładem Poissona, gdzie wartość pojedynczej szkody ma rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej β^{-1}. Niech λ_F oznacza najmniejszą oczekiwaną liczbę szkód (zaokrągloną do liczby całkowitej) taką, przy której danym statystycznym o grupie ryzyk przypisujemy pełną wiarygodność (*full credibility*), tzn. dla której $\Pr(0.9 \cdot c < C < 1.1 \cdot c) \geq 0.95$, gdzie c jest całkowitą składką netto, a C jej oszacowaniem (łączną wartością szkód zarejestrowanych w naszym zbiorze danych). Przyjmując aproksymację rozkładem normalnym rozkładu zmiennej C i wiedząc, iż standaryzowana zmienna normalna przyjmuje wartość większą co do modułu od 1.96 z prawdopodobieństwem 0.05 otrzymujemy iż λ_F wynosi:

(A) 768

(B) 543

(C) 384

(D) 1086

(E) do udzielenia odpowiedzi brakuje informacji o wartości parametru β

Zadanie 10.

Czas, jaki upływa od zajścia każdej szkody do jej likwidacji jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym o wartości oczekiwanej pół roku, przy czym dla poszczególnych szkód zmienne te są niezależne, niezależne są także do momentów zajścia szkód.

Liczba szkód zaszłych przed końcem roku 2007, i do tego momentu nie zlikwidowanych wynosi 150. Oczekiwana liczba szkód które zajdą na odcinku czasu $(2007,\ 2007+t)$, gdzie $t \in (0,1)$, wynosi:

$$S(2007,\ 2007+t) = 250t + 50t^2, \qquad t \in (0,1).$$

Wobec tego oczekiwana liczba szkód zaszłych a nie zlikwidowanych na koniec roku 2008 wynosi:

(A) $250 - 150e^{-2}$

(B) $250 - 100e^{-2}$

(C) $200 - 50e^{-2}$

(D) $150 + 50e^{-2}$

(E) 150

Egzamin dla Aktuariuszy z 6 października 2008 r.

Matematyka ubezpieczeń majątkowych

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ : .... K l u c z   o d p o w i e d z i ……….........................

~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	D	
2	A	
3	A	
4	B	
5	B	
6	E	
7	E	
8	C	
9	A	
10	D	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.
♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.