Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

XLVI Egzamin dla Aktuariuszy z 2 czerwca 2008 r.

Część I

Matematyka finansowa

WERSJA TESTU A

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej:

....

Czas egzaminu: 100 minut

1. Inwestor kupuje po zaproponowanej przez siebie cenie europejską opcję kupna po cenie średniej na akcje spółki X. Do wyznaczenia tej ceny przyjmuje on następujące założenia dotyczące kursu akcji w kolejnych trzech okresach:

- w każdym z okresów cena akcji spółki może wzrosnąć o 30% z prawdopodobieństwem 60% lub zmaleć o 20%,
- obecna cena akcji wynosi 100,
- oczekiwana przez inwestora efektywna stopa zwrotu z tej inwestycji wynosi $i = 15\%$ w skali jednego okresu.

Po upływie trzech okresów okazuje się, że cena akcji kształtowała się następująco: 120 na koniec pierwszego okresu, 160 na koniec drugiego okresu i 150 na koniec trzeciego. Efektywna stopa zwrotu z tej inwestycji, w skali jednego okresu, wyniosła:

A) -57.6%
B) -5.8%
C) 7.6%
D) 15.0%
E) 21.3%

Uwaga: Europejska opcja kupna po cenie średniej wypłaca na koniec trzeciego okresu różnicę pomiędzy ceną końcową a ceną średnią w całym okresie ważności opcji liczoną z uwzględnieniem ceny początkowej oraz końcowej, o ile ta różnica jest dodatnia.

2. Pan Jan zamierza nabyć za 3 lata 3 letnią rentę pewną płatną na koniec każdego roku o stałych płatnościach 10 000 PLN. Do tego czasu planuje on wpłacać na koniec każdego miesiąca na konto oszczędnościowe taką stałą kwotę aby suma wpłat wraz z odsetkami sfinansowała zakup renty. Wiadomo, że oprocentowanie konta oszczędnościowego wynosi 0.4% w ujęciu miesięcznym, a stopa rynkowa służąca do wyznaczenia ceny renty za 3 lata ma rozkład jednostajny na przedziale (3%, 7%). Jaką kwotę powinien co miesiąc wpłacać Pan Jan? Podać najbliższą odpowiedź.

A) 705 PLN
B) 709 PLN
C) 715 PLN
D) 758 PLN
E) 814 PLN

3. Przez *bieżącą rentowność* transakcji nabycia europejskich opcji nie płacących dywidendy rozumiemy wielkość $R_C(t) = K + C - S_t$ dla opcji kupna o cenie C oraz $R_P(t) = K - P - S_t$ dla opcji sprzedaży o cenie P, z instrumentem podstawowym (akcja nie płacąca dywidendy) o bieżącej cenie S_t, po cenie wykonania K. Na rynku Blacka-Scholesa rozważmy dwie roczne opcje europejskie, kupna i sprzedaży przy $K = 50$, wygasające za 9 miesięcy, wolna od ryzyka stopa $r = 10\%$ rocznie, a zmienność cen akcji $\sigma = 20\%$. Bieżąca cena akcji wynosi 53. Jak powinna się zmienić bieżąca cena akcji, aby bieżące rentowności transakcji nabycia opcji kupna i opcji były takie same co do wartości bezwzględnej i miały przeciwny znak? Odpowiedź:

A) spaść o 6.5

B) spaść o 0.3

C) nie zmienić się

D) wzrosnąć o 0.3

E) wzrosnąć o 6.5

Uwaga: Należy użyć przybliżonych tablic rozkładu normalnego, nie używając aproksymacji liniowej, odczytując jedynie najbliższą wartość dystrybuanty.

d	**0**	**0.05**	**0.1**	**0.15**	**0.2**	**0.25**	**0.3**	**0.35**
N(d)	0.5000	0.5199	0.5398	0.5596	0.5793	0.5987	0.6179	0.6368
d	**0.4**	**0.45**	**0.5**	**0.55**	**0.6**	**0.65**	**0.7**	**0.75**
N(d)	0.6554	0.6736	0.6915	0.7088	0.7257	0.7422	0.7580	0.7734
d	**0.8**	**0.85**	**0.9**	**0.95**	**1**	**1.05**	**1.1**	**1.15**
N(d)	0.7881	0.8023	0.8159	0.8289	0.8413	0.8531	0.8643	0.8749
d	**1.2**	**1.25**	**1.3**	**1.35**	**1.4**	**1.45**	**1.5**	**1.55**
N(d)	0.8849	0.8944	0.9032	0.9115	0.9192	0.9265	0.9332	0.9394
d	**1.6**	**1.6500**	**1.7**	**1.75**	**1.8**	**1.85**	**1.9**	**1.95**
N(d)	0.9452	0.9505	0.9554	0.9599	0.9641	0.9678	0.9713	0.9744
d	**2**	**2.05**	**2.1**	**2.15**	**2.2**	**2.25**	**2.3**	**2.35**
N(d)	0.9772	0.9798	0.9821	0.9842	0.9861	0.9878	0.9893	0.9906
d	**2.4**	**2.45**	**2.5**	**2.55**	**2.6**	**2.65**	**2.7**	**2.75**
N(d)	0.9918	0.9929	0.9938	0.9946	0.9953	0.9960	0.9965	0.9970
d	**2.8**	**2.85**	**2.9**	**2.95**	**3**	**3.05**	**3.1**	**3.15**
N(d)	0.9974	0.9978	0.9981	0.9984	0.9987	0.9989	0.9990	0.9992

4. Załóżmy, że cena pewnego instrumentu finansowego jest zmienną losową o pewnym rozkładzie ze średnią 0 i wariancją 1. Rozważmy ciąg nieskończony takich wzajemnie niezależnych zmiennych losowych $\{X_n, n \geq 1\}$. Niech $\Phi_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$ będzie σ-ciałem generowanym przez $X_1, \ldots, X_n$. Spośród stwierdzeń:

i. proces $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ jest martyngałem względem Φ_n,

ii. proces $S_n^2 - n$ jest martyngałem względem Φ_n,

iii. proces $\mathbb{E}(X_1 | \Phi_n)$ jest martyngałem względem Φ_n,

prawdziwe są

A) żadne

B) i, ii

C) i, iii

D) ii, iii

E) wszystkie

Uwaga: Ciąg niezależnych zmiennych losowych $\{X_n, n \geq 1\}$ nazywamy martyngałem względem σ-ciała $\Phi_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$, jeśli $E(X_{n+1} | \Phi_n) = X_n$.

5. Kredyt mieszkaniowy zaciągnięty w kwocie 300 000 spłacany jest w równych ratach na koniec roku, w ciągu 30 lat. Ile wynosi roczna rata kredytu, jeżeli oprocentowanie kredytu jest następujące:

10% - w latach 6k + 1,

8% - w latach 6k + 2,

6% - w latach 6k + 3,

7% - w latach 6k + 4,

4% - w latach 6k + 5,

5% - w latach 6k + 6,

gdzie k = 0, 1,...,4. Podaj najbliższą wartość.

A) 24 018

B) 24 054

C) 24 095

D) 24 130

E) 24 158

6. Bieżące kursy walutowe wynoszą : 1 USD = 2,2 PLN, 1 USD = 0,70 EUR. Oprocentowanie rocznych depozytów i kredytów:

	PLN	EUR	USD
kredyt	9%	6%	4%
depozyt	6%	4%	2%

Inwestor może dokonywać bez kosztów wszelkich operacji według wyżej określonych stawek rynkowych. Przy którym z poniższych kursów terminowych z rozliczeniem za rok jest możliwy arbitraż?

A) 1 EUR = 3.27 PLN

B) 1 USD = 2.35 PLN

C) 1 USD = 0.72 EUR

D) 1 EUR = 1.39 USD

E) 1 PLN = 0.32 EUR

7. Przyszły Emeryt (PE) rozpoczyna z początkiem roku plan oszczędzania polegający na inwestowaniu w funduszu inwestycyjnym części swojego wynagrodzenia. Celem planu jest zgromadzenie na koniec 20 roku oszczędzania środków w wysokości wystarczającej do wypłaty 10 letniej renty pewnej płatnej z dołu w wysokości 2 000 PLN miesięcznie.

Stopa zwrotu w funduszu inwestycyjnym wynosi 0.3% miesięcznie w okresie pierwszych 10 lat oszczędzania, 0.25% miesięcznie w okresie następnych 10 lat i 0.2% miesięcznie w okresie pobierania renty (dla uproszczenia zakładamy, że fundusz również wypłaca rentę ze zgromadzonych przez PE środków).

Wynagrodzenie PE w chwili rozpoczęcia planu oszczędzania wynosi 3 500 PLN i będzie rosło o 30 PLN miesięcznie w całym 20 letnim okresie oszczędzania.

PE będzie przekazywać do funduszu na początku każdego miesiąca K% swojego wynagrodzenia przez pierwsze 10 lat oraz (K + 3)% wynagrodzenia przez pozostałe 10 lat oszczędzania.

Ile wynosi K (podaj najbliższą wartość)?

A) 6.36

B) 6.86

C) 7.36

D) 7.86

E) 8.36

8. Na rynku finansowym dany jest instrument pochodny X zapadający za 3 lata od dziś, oraz pewien instrument bazowy Y. Instrumentem bazowym dla instrumentu X jest akcja A, o której wiadomo że jej cena S_3 za 3 lata jest funkcją ceny Y (zmiennej losowej) instrumentu bazowego Y o rozkładzie jednostajnym na przedziale [80,120] w następujący sposób:

$$S_3 = 4Y - 50, \qquad Y \sim U[80,120]$$

Wypłata V_3 z instrumentu X dana jest wzorem:

$$V_3 = Max(S_3 - 350, 0)e^{-0.08Y}$$

Ponadto na rynku dostępna jest zero-kuponowa obligacja rządowa o terminie zapadalności równym 3 lata, której cena obecna zależy od Y w następujący sposób:

$$P(0,3) = 10^6 e^{-0.12Y}.$$

Na podstawie powyższych informacji oraz zakładając brak arbitrażu oblicz obecną wartość w instrumentu X w milionach jednostek (podaj najbliższą wartość):

A) $2.5e^{-20}(1-5e^{-4})$

B) $50e^{-12} - 250e^{-400}$

C) $10e^{-10}(1-20e^{-40})$

D) $100e^{-12}(1-5e^{-40})$

E) $2.5e^{-16}(5e^{-8} - 3)$

Uwaga: Funkcja P(t,T) oznacza cenę w chwili t obligacji zapadającej w chwili T ($t \leq T$).

9. Inwestor chce oszacować oczekiwaną stopę zwrotu z akcji X w oparciu o Model Wyceny Aktywów Kapitałowych - CAPM (*Capital Asset Pricing Model*). Ma do dyspozycji następujące informacje:

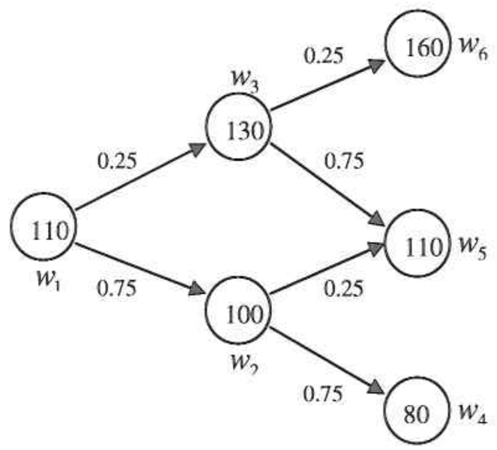
- stopa wolna od ryzyka wynosi 10%
- oczekiwana stopa zwrotu z indeksu replikującego cały rynek wynosi 22%
- korelacja między stopą zwrotu akcji i stopą zwrotu indeksu wynosi 14%
- wariancja stopy zwrotu indeksu wynosi 36%
- wariancja stopy zwrotu akcji wynosi 25%.

Wartość oczekiwanej stopy zwrotu z akcji X wynosi (podaj najbliższą wartość):

A) 10.42%
B) 10.84%
C) 11.40%
D) 12.02%
E) 16.72%

10. Obecna wartość akcji wynosi $S_0 = 110$. Wartość ceny akcji w horyzoncie 2 lat opisuje proces S_t. Możliwe ceny akcji w każdym z momentów t=0,1,2 są przedstawione na wierzchołkach $w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6$ drzewka dwumianowego. Niezależnie od procesu ceny akcji S_t wprowadzamy miarę $\mathbb{P}$ determinująca prawdopodobieństwa wzrostu ceny p = 0.25 oraz spadku q = 0.75 w każdym z wierzchołków w stosunku do ceny z wierzchołka poprzedniego. Definiujemy filtrację (niemalejącą rodzinę σ-ciał) $\{F_t\}$, $(t = 0,1,2)$ jako historię podróży procesu po drzewku do chwili t:

- dla $t = 0$ $F_0 = \{w_1\}$
- dla $t = 1$ $F_1 = \{\{w_1, w_2\}, \{w_1, w_3\}\}$
- dla $t = 2$ $F_2 = (\{w_1, w_2, w_4\}, \{w_1, w_2, w_5\} \vee \{w_1, w_3, w_5\}, \{w_1, w_3, w_6\})$



czas: $t = 0$ $t = 1$ $t = 2$

cena akcji: S_0 S_1 S_2

Wskaż prawdziwe stwierdzenie:

A) wartość oczekiwana ceny S_2 względem miary $\mathbb{P}$ pod warunkiem, że proces znajduje się w wierzchołku w_2 wynosi 100

B) wartość oczekiwana ceny S_2 względem miary $\mathbb{P}$ pod warunkiem, że proces znajduje się w wierzchołku w_3 wynosi 130

C) proces ceny akcji S_t jest martyngałem względem miary $\mathbb{P}$ i filtracji $\{F_t\}_{t=0,1,2}$

D) proces ceny akcji S_t jest podmartyngałem względem miary $\mathbb{P}$ i filtracji $\{F_t\}_{t=0,1,2}$

E) proces ceny akcji S_t jest nadmartyngałem względem miary $\mathbb{P}$ i filtracji $\{F_t\}_{t=0,1,2}$

Uwaga:
Proces S_t jest martyngałem względem miary P i filtracji $\{F_t\}_{t=0,1,2}$ jeśli $E^P[X_t|F_s] = X_s$ dla dowolnego $s \leq t$. Proces S_t jest podmartyngałem względem miary P i filtracji $\{F_t\}_{t=0,1,2}$ jeśli $E^P[X_t|F_s] \geq X_s$ dla dowolnego $s \leq t$. Proces S_t jest nadmartyngałem względem miary P i filtracji $\{F_t\}_{t=0,1,2}$ jeśli $E^P[X_t|F_s] \leq X_s$ dla dowolnego $s \leq t$.

Egzamin dla Aktuariuszy z 2 czerwca 2008 r.

Matematyka finansowa

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko: ....

Pesel: ....

OZNACZENIE WERSJI TESTU A.

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja
1	C	
2	A	
3	D	
4	E	
5	A	
6	E	
7	D	
8	A	
9	C	
10	E	