Zadanie 1.

Niech F_W oznacza dystrybuantę sumy dwóch niezależnych zmiennych losowych o dystrybuantach odpowiednio F_1 oraz F_2:

Dla $x < 0$	$F_1(x) = 0$	$F_2(x) = 0$
Dla $x \in [0,1)$	$F_1(x) = 0.6 + 0.2x$	$F_2(x) = 0.7 + 0.1x$
Dla $x \geq 1$	$F_1(x) = 1$	$F_2(x) = 1$

$F_W(3/2)$ wynosi:

(A) 0.9200

(B) 0.9225

(C) 0.9250

(D) 0.9275

(E) 0.9300

Zadanie 2.
Rozważamy model nadwyżki ubezpieczyciela z czasem dyskretnym:
$U_n = u + X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, gdzie:

- u to nadwyżka początkowa (nieujemna);
- $X_1, X_2, X_3, \ldots$ są i.i.d, i reprezentują różnice pomiędzy wpływami ze składki a wydatkami na odszkodowania w kolejnych latach;
- rozkład zmiennej X_1 jest czteropunktowy:
  $\Pr(X_1 = 2) = p_2$,
  $\Pr(X_1 = 1) = p_1$,
  $\Pr(X_1 = 0) = p_0$,
  $\Pr(X_1 = -1) = 1 - p_0 - p_1 - p_2$.

Niech $N = \min\{n\colon\ U_n < 0\}$ oznacza czas ruiny.
Przyjmijmy, że parametry procesu wynoszą: $p_0 = 3/10$, $p_1 = 1/10$, $p_2 = 1/10$, oraz $u = 11/2$. W tych warunkach ruina jest pewna, a więc $\Pr(N < \infty) = 1$. Wobec tego oczekiwany czas do ruiny $\mathrm{E}(N)$ jest wielkością dobrze określoną, i wynosi:

(A) 12

(B) 15

(C) 20

(D) 25

(E) 30

Zadanie 3.

Dwa nieobciążone predyktory $\hat{\Theta}_1$ i $\hat{\Theta}_2$ parametru ryzyka Θ obarczone są błędami o wariancji odpowiednio 4 i 2 oraz kowariancji 5/2. Predyktor kombinowany $\hat{\Theta}_3(z) = z\hat{\Theta}_1 + (1-z)\Theta_2$ obarczony jest błędem o najmniejszej wariancji gdy współczynnik z równy jest:

(A) $-1/2$

(B) $-1/4$

(C) 0

(D) $1/4$

(E) $1/2$

Zadanie 4.

Łączna wartość odszkodowań z pewnego jednorodnego portfela ryzyk ma rozkład złożony Poissona o funkcji generującej momenty postaci:

$$M_S(t) = \exp\left[\frac{4t(10-t)}{(5-t)^2}\right], \qquad t < 5.$$

W portfelu tym liczba pojawiających się roszczeń ma rozkład Poissona z wartością oczekiwaną równą 5. Pojawiające się roszczenie z prawdopodobieństwem p jest oddalone, a z prawdopodobieństwem $q = 1 - p$ odpowiadające mu odszkodowanie ma pewien rozkład ciągły na dodatniej półosi. Prawdopodobieństwo oddalenia roszczenia p wynosi:

(A) $\frac{1}{5}$

(B) $\frac{2}{5}$

(C) $\frac{1}{2}$

(D) $\frac{3}{4}$

(E) $\frac{4}{5}$

Zadanie 5.
Likwidacja szkody zaistniałej w miesiącu t następuje jeszcze w tym samym miesiącu z prawdopodobieństwem $\frac{2}{22}$, a w miesiącu $t+k$ (dla $k = 1,2,3,\ldots$), z prawdopodobieństwem $\frac{5}{22} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}$. Wartość każdej szkody wynosi 1. W miesiącach t, t+1 i t+2 zaistniały odpowiednio 88, 110 i 143 szkody. Wyznacz stan rezerwy na niewypłacone odszkodowania na koniec miesiąca t+2, jeśli na początku miesiąca t stan tej rezerwy wynosił 320.

(A) 327

(B) 372

(C) 385

(D) 405

(E) brakuje danych o strukturze rezerwy na początku t-tego miesiąca

Zadanie 6.
O rozkładzie wartości pojedynczej szkody Y wiemy, iż jest to rozkład ciągły z dystrybuantą ściśle rosnącą na przedziale $(0, M)$, oraz iż $\Pr(Y \in (0, M)) = 1$. Ponadto wiemy, iż składka netto za nadwyżkę szkody ponad d jest dla $d \in (4, 6)$ dana wzorem:

$$E\left[(Y-d)_+\right] = \frac{(10-d)^3}{300}.$$

Niech Z_E oznacza zbiór możliwych wartości $E(Y)$, zaś Z_M zbiór możliwych wartości M. Zbiory te mają postać:

(A) $Z_E = (2.16,\ 4.72)$, $Z_M = (7, \infty)$

(B) $Z_E = (2.16,\ 4.72)$, $Z_M = \left(7\frac{1}{3}, \infty\right)$

(C) $Z_E = \left(1.56,\ 3\frac{1}{3}\right)$ $Z_M = (7, \infty)$

(D) $Z_E = (1.56,\ 4.72)$ $Z_M = \left(7\frac{1}{3}, \infty\right)$

(E) $Z_E = \left(2.16,\ 3\frac{1}{3}\right)$ $Z_M = (7, \infty)$

Zadanie 7.
W klasycznym modelu nadwyżki ubezpieczyciela z czasem ciągłym rozkład wartości pojedynczej szkody *Y* ma gęstość:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{64}{(2+y)^5} & dla \quad y > 0 \\ 0 & dla \quad y \le 0 \end{cases},$$

oczekiwana ilość szkód na jednostkę czasu $\lambda = 3$, a pochodna funkcji gromadzonej składki $c = 2.5$. Współczynnik przystosowania (*adjustment coefficient*) *R* wynosi:

(A) $\frac{1}{2}$

(B) $\frac{2}{3}$

(C) 1

(D) $\frac{4}{3}$

(E) jest nieokreślony

Zadanie 8.
Obserwujemy realizacje x_{it} łącznej wartości szkód X_{it} i-tego ubezpieczonego w t-tym roku dla $i = 1, 2, \ldots, N, \quad t = 1, 2, \ldots, T; \quad N > 2, \quad T > 2;$

nie znamy natomiast wartości następujących parametrów:

$\mu(\Theta_i) = E(X_{it} / \Theta_i)$,

$\sigma^2(\Theta_i) = VAR(X_{it} / \Theta_i)$,

$\mu = E(\mu(\Theta_i))$,

$s^2 = E(\sigma^2(\Theta_i))$,

$a = VAR(\mu(\Theta_i))$;

wiemy natomiast, że jeśli $i \neq j$ lub $t \neq s$ to $COV(X_{it}, X_{js} / \Theta_i, \Theta_j) = 0$.

Niech $\overline{X}_i = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X_{it}, \quad \overline{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \overline{X}_i$.

Mamy dwa estymatory parametru a:

$$\hat{a}_1 = \frac{1}{NT-1}\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\left(X_{it} - \overline{X}\right)^2 - \frac{1}{N(T-1)}\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\left(X_{it} - \overline{X}_i\right)^2,$$

oraz:

$$\hat{a}_2 = \max\{\hat{a}_1, 0\}.$$

Niech $MSE(\hat{a}_i) = E\left[(\hat{a}_i - a)^2\right]$.

Wybierz zdanie prawdziwe:

(A) oba estymatory są nieobciążone, $VAR(\hat{a}_1) < VAR(\hat{a}_2)$

(B) oba estymatory są nieobciążone, $VAR(\hat{a}_1) > VAR(\hat{a}_2)$

(C) $E(\hat{a}_1) < E(\hat{a}_2), \quad VAR(\hat{a}_1) < VAR(\hat{a}_2)$

(D) $VAR(\hat{a}_2) < MSE(\hat{a}_2) < VAR(\hat{a}_1)$

(E) $VAR(\hat{a}_2) < VAR(\hat{a}_1) < MSE(\hat{a}_2)$

Zadanie 9.
Wyjściowy portfel składa się z n niezależnych ryzyk. Łączna wartość szkód dla pojedynczego ryzyka ma wartość oczekiwaną μ i odchylenie standardowe σ.
S oznacza łączną wartość szkód z całego portfela ryzyk. Składkę za pojedyncze ryzyko skalkulowano w wysokości G tak, aby:
$\Pr(S > n \cdot G) = 0.01$,
przy czym prawdopodobieństwo to obliczono na podstawie aproksymacji rozkładem normalnym.
Dla naszego portfela wyjściowego mamy:
$n = 1000$, $\mu = 10$, $\sigma = 10$.
Pojawiła się możliwość objęcia ubezpieczeniem dodatkowych n_1 ryzyk, niezależnych nawzajem oraz niezależnych od pierwszych n ryzyk z portfela wyjściowego.
Ich charakterystyki to:
$\mu_1 = 10$, $\sigma_1 = 15$,
Jednakże warunkiem objęcia „nowych" ryzyk jest zaoferowanie pokrycia za składkę w tej samej wysokości G, co dla „starych" ryzyk. Niech S_1 oznacza łączną wartość szkód z nowych ryzyk.

Dla jakich n_1 mamy:
$\Pr(S + S_1 > (n + n_1) \cdot G) \leq 0.01$?
(*Podaj warunek konieczny i dostateczny, opierając się i tym razem na aproksymacji normalnej*)

(A) Dla $n_1 \leq 250$

(B) Dla $n_1 \geq 1500$

(C) Dla $n_1 \geq 250$

(D) Dla każdego n_1

(E) Dla żadnego n_1

Zadanie 10.
Łączna wartość szkód *S*:
$S = X_1 + \cdots + X_N$
ma złożony rozkład geometryczny. Iloraz postępu rozkładu liczby szkód równy jest ½, zaś zmienna X_1 ma rozkład wykładniczy z wartością oczekiwaną równą 2.
$\Pr(S \le 4\ln 5)$ wynosi:

(A) 0.9

(B) 0.8

(C) 0.6

(D) 0.5

(E) 0.3

Egzamin dla Aktuariuszy z 23 maja 2016 r.

Matematyka ubezpieczeń majątkowych

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ : ....K L U C Z   O D P O W I E D Z I......................

~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	D	
2	E	
3	A	
4	A	
5	C	
6	B	
7	E	
8	D	
9	C	
10	A	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.
♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.