

**Zadanie 1.**

Wiadomo, że zmienne losowe  $N_1, N_2$  są niezależne, i mają rozkłady określone na zbiorze liczb całkowitych nieujemnych, spełniające zależności rekurencyjne:

$$\Pr(N_1 = k) = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2k}\right) \cdot \Pr(N_1 = k - 1), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

$$\Pr(N_2 = k) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2k}\right) \cdot \Pr(N_2 = k - 1), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Wobec tego  $\Pr(N_1 + N_2 = 5)$  wynosi:

(A)  $\frac{112}{1024}$

(B)  $\frac{126}{1024}$

(C)  $\frac{210}{1024}$

(D)  $\frac{224}{1024}$

(E)  $\frac{252}{1024}$

**Zadanie 2.**

$Y_1$  i  $Y_2$  to dwie niezależne zmienne losowe o takim samym rozkładzie Pareto o dystrybuancie danej na półosi dodatniej wzorem:

$$F(y) = 1 - \left(\frac{v}{v+y}\right)^\alpha,$$

Gdzie wartość parametru kształtu wynosi  $\alpha = 2$ , zaś parametr skali  $v$  jest liczbą dodatnią.

Przyjmijmy oznaczenia:

$$M := \max\{Y_1, Y_2\},$$

$$S := Y_1 + Y_2.$$

Udział wartości oczekiwanej większej z tych zmiennych w wartości oczekiwanej ich sumy, a więc  $\frac{EM}{ES}$ , wynosi:

(A)  $\frac{3}{4}$

(B)  $\frac{5}{6}$

(C)  $\frac{7}{8}$

(D)  $\frac{9}{10}$

(E)  $\frac{11}{12}$

**Zadanie 3.**

Każdej jednostce z pewnej populacji przydarzają się szkody zgodnie z procesem Poissona, przy czym intensywność  $\lambda$  (rocznie) charakteryzująca pojedynczą jednostkę jest w przekroju tej populacji zróżnicowana. Znamy pierwsze trzy momenty rozkładu parametru ryzyka  $\Lambda$  w tej populacji:

$$E\Lambda = \frac{2}{7}, \quad E(\Lambda^2) = \frac{6}{49}, \quad E(\Lambda^3) = \frac{24}{343}.$$

Niech  $N$  oznacza liczbę szkód wygenerowaną przez (losowo wybraną z tej populacji) jednostkę w ciągu roku. Współczynnik skośności zmiennej  $N$  wynosi:

(A)  $\frac{40}{16}$

(B)  $\frac{39}{16}$

(C)  $\frac{38}{16}$

(D)  $\frac{37}{16}$

(E)  $\frac{36}{16}$

**Zadanie 4.**

Niech:

- $N$  oznacza liczbę roszczeń z jednego wypadku ubezpieczeniowego, zaś:
- $T_1, T_2, \dots, T_N$  oznacza czas, jaki upływa od momentu zajścia wypadku do zgłoszenia roszczenia odpowiednio 1-go, 2-go, ...,  $N$ -tego, przy czym numeracja roszczeń od 1-go do  $N$ -tego jest całkowicie przypadkowa (porządek liczb  $T_1, T_2, \dots, T_N$  jest losowy)

Założmy, że:

- zmienne losowe  $N, T_1, T_2, T_3, \dots$  są niezależne,
- zmienne losowe  $T_1, T_2, T_3, \dots$  mają identyczny rozkład wykładniczy o gęstości danej dla dodatnich  $t$  wzorem:  $f(t) = (2/3)^t \ln(3/2)$  przy czym jednostką pomiaru czasu jest miesiąc
- zmienna losowa  $N$  ma rozkład ucięty Poissona o funkcji prawdopodobieństwa:

$$\Pr(N = k) = \frac{(\ln(2))^k}{k!}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Niech  $A$  oznacza zdarzenie, iż w ciągu pierwszego miesiąca od zajścia wypadku zgłoszono dokładnie jedno roszczenie, a więc iż dokładnie jedna liczba ze zbioru liczb  $\{T_1, T_2, \dots, T_N\}$ , jest mniejsza lub równa 1.

Prawdopodobieństwo, że z tego wypadku pojawią się jeszcze następne roszczenia:

$$\Pr(N > 1|A)$$

Z dobrym przybliżeniem wynosi:

- (A) 0.427
- (B) 0.370
- (C) 0.303
- (D) 0.256
- (E) 0.213

**Zadanie 5.**

Zmienna losowa  $X$  jest sumą trzech niezależnych zmiennych losowych o rozkładach złożonych Poissona. Rozkłady te różnią się zarówno parametrem częstotliwości szkód, jak i rozkładem wartości pojedynczej szkody. W każdym jednak przypadku wartość pojedynczej szkody może wynieść jedynie 1, 2 lub 3. Parametry tych rozkładów podane są w poniższej tabeli, w której  $Y$  symbolizuje zmienną reprezentującą wartość pojedynczej szkody.

Numer rozkładu	częstotliwość	$\Pr(Y = 1)$	$\Pr(Y = 2)$	$\Pr(Y = 3)$
1	$2/3$	$1/2$	0	$1/2$
2	$2/3$	$1/2$	$1/2$	0
3	$5/3$	$8/10$	$1/10$	$1/10$

Przy tych założeniach parametr  $a$  wzoru:

- $\Pr(X = 3) = a \exp(-3)$

wynosi:

- (A)  $17/6$
- (B)  $16/6$
- (C)  $15/6$
- (D)  $14/6$
- (E)  $13/6$

**Zadanie 6.**

Każdy kierowca z pewnej populacji zgłasza szkody zgodnie z procesem Poissona, przy czym intensywność  $\lambda$  (rocznie) charakteryzująca pojedynczego kierowcę jest w przekroju tej populacji zróżnicowana. Populacja jest zamknięta, a kierowcy migrują pomiędzy trzema klasami bardzo prostego systemu bonus-malus. W systemie tym każdy kierowca, który w danym roku zgłosił jedną lub więcej szkód, łąduje w roku następnym w klasie pierwszej (z najwyższą składką). Jeśli jednak nie zgłosił żadnej szkody, wtedy:

- Łąduje w klasie 2, o ile w danym roku był w klasie 1;
- Łąduje w klasie 3, o ile w danym roku był w klasie 2.

Rozkład wartości parametru  $\lambda$  w przekroju populacji jest rozkładem gamma o gęstości danej na półosi dodatniej wzorem:

- $f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp(-\beta x)$ , z parametrami równymi  $(\alpha, \beta) = (2, 6)$ .

W celu skalkulowania składki adekwatnej dla osób przebywających w klasie drugiej liczymy warunkową wartość oczekiwaną:

- $E(N_3 | N_1 > 0, N_2 = 0)$ ,

gdzie  $N_3$  to liczba szkód które zostaną zgłoszone w roku nadchodzącym, zaś  $N_2$  oraz  $N_1$  to odpowiednio liczba szkód w roku upływającym oraz rok wcześniej, a wszystkie trzy liczby dotyczą losowo dobranej kierowcy z tej populacji.

Owa warunkowa wartość oczekiwana wynosi:

- (A) 143/420
- (B) 153/420
- (C) 156/420
- (D) 162/420
- (E) 169/420

**Zadanie 7.**

Rozważamy klasyczny proces nadwyżki z zerową nadwyżką początkową:

$$U(t) = ct - \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k, \text{ gdzie:}$$

- $ct$  jest sumą składek zgromadzonych do momentu  $t$ ,
- $N(t)$  jest procesem Poissona z parametrem intensywności  $\lambda$ ,
- wartości szkód  $Y_1, Y_2, Y_3$  są i.i.d, niezależne od procesu  $N(t)$ .

O rozkładzie wartości pojedynczej szkody wiemy tylko tyle, że:

- $\Pr(Y_1 \in [0, 10]) = 1$
- $E(Y_1) = 4$

Wiemy też, że  $c > 4\lambda$ .

Interesuje nas warunkowa wartość oczekiwana deficytu w momencie ruiny, pod warunkiem że do ruiny dojdzie. Informacje są nazbyt skąpe, aby ją wyznaczyć, można jednak określić przedział, który zawiera wszystkie jej możliwe wartości, i równocześnie nie zawiera nic ponadto. Ten przedział to:

- (A)  $[0, 5]$
- (B)  $[0, 10]$
- (C)  $[2, 5]$
- (D)  $[2, 10]$
- (E)  $[4, 10]$

**Zadanie 8.**

Rozważamy proces nadwyżki z czasem dyskretnym postaci:

$$U_n = u + c \cdot n - S_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

gdzie  $S_n = W_1 + W_2 + \dots + W_n$  jest procesem o przyrostach niezależnych o identycznym rozkładzie takim, że  $\Pr(W \geq 0) = 1$ . Załóżmy, że  $c < E(W) < \infty$ , wobec czego ruina jest pewna. Niech:

$T(u) = \inf \{n : n \in \{0, 1, 2, \dots\}, U_n < 0\}$  oznacza czas ruiny, zaś  $E(T(u))$  oczekiwany czas ruiny. Oczywiście dla ujemnych wartości  $u$  zachodzi  $E(T(u)) = 0$ .

Która z poniższych tożsamości całkowych spełniona jest przez funkcję  $E(T(u))$  dla nieujemnych wartości  $u$ ?

(A)  $E(T(u)) = 1 - F_w(u + c) + \int_0^{u+c} E(T(u + c - x)) dF_w(x)$

(B)  $E(T(u)) = \int_0^{u+c} E(T(u + c - x)) dF_w(x)$

(C)  $E(T(u)) = 1 + \int_0^{u+c} E(T(u + c - x)) dF_w(x)$

(D)  $E(T(u)) = 1 - F_w(u + c) + F_w(u + c) \cdot \int_0^{u+c} E(T(u + c - x)) dF_w(x)$

(E)  $E(T(u)) = 1 - F_w(u + c) + F_w(u + c) \cdot \int_0^{u+c} [1 + E(T(u + c - x))] dF_w(x)$



**Zadanie 9.**

Łączna wartość szkód:

- $X = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_N$ , ( $X = 0$  gdy  $N = 0$ )

ma przy danej wartości  $\lambda$  parametru ryzyka  $\Lambda$  warunkowy rozkład złożony Poissona o oczekiwanej licznie szkód równej  $\lambda$  oraz rozkładzie wartości pojedynczej szkody danym dla  $x \geq 0$  dystrybuantą:

- $F_{Y|\Lambda=\lambda}(x) = 1 - \exp(-a \cdot \exp(b\lambda) \cdot x)$

Parametr ryzyka  $\Lambda$  ma w populacji ubezpieczonych rozkład Gamma( $\alpha, \beta$ ), o gęstości:

- $f_{\Lambda}(x) = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp(-\beta x)$ .

Przyjmijmy wartości parametrów zadania równe:

- $a = \frac{1}{11}$ ,  $b = 2$
- $\alpha = 4$ ,  $\beta = 10$

Wobec tego iloraz:

- $\frac{E(X)}{E(N) \cdot E(Y)}$

wynosi:

(A) 1

(B)  $\frac{11}{12}$

(C)  $\frac{10}{11}$

(D)  $\frac{10}{12}$

(E)  $\frac{9}{11}$

**Zadanie 10.**

Modelujemy przebiegający w czasie proces ściągania należności regresowych przez ubezpieczyciela. Niech  $T$  oznacza zmienną losową o rozkładzie:

- ciągłym na przedziale  $(0, +\infty)$
- z pewną, być może dodatnią masą prawdopodobieństwa w punkcie  $+\infty$ , reprezentującą czas ściągnięcia należności regresowej (liczony od momentu powstania prawa do regresu). Niech  $f_T$ ,  $F_T$  oraz  $h_T$  oznaczają odpowiednio funkcję gęstości, dystrybuantę oraz funkcję hazardu zmiennej  $T$ . Dystrybuancie oraz funkcji hazardu nadajemy następującą interpretację:

- $F_T(t) = \int_0^t f_T(s) ds$  to wskaźnik ściągальności do czasu  $t$  (oczywiście  $F_T(0) = 0$ )
- $\lim_{t \rightarrow \infty} F_T(t) = \Pr(T < \infty)$  to wskaźnik ściągальności ostatecznej,
- $h_T(t) = \frac{f_T(t)}{1 - F_T(t)}$  dla  $t > 0$  to natężenie procesu ściągania (gęstość ściągania należności, które do momentu  $t$  pozostają jeszcze nie ściągnięte)

Założmy, że natężenie procesu ściągania dane jest funkcją hazardu określoną na półosi dodatniej następująco:

- $h_T(t) = \frac{2}{(4+t)}$ .

Wtedy wskaźnik ściągальności ostatecznej wynosi:

- (A) 1
- (B)  $\frac{4}{5}$
- (C)  $\frac{3}{4}$
- (D)  $\frac{3}{5}$
- (E)  $\frac{1}{2}$

**Egzamin dla Aktuariuszy z 7 marca 2016 r.****Matematyka ubezpieczeń majątkowych****Arkusz odpowiedzi\***

Imię i nazwisko : .....KLUCZ ODPOWIEDZI.....

Pesel .....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja ♦
1	B	
2	B	
3	E	
4	B	
5	A	
6	E	
7	C	
8	C	
9	D	
10	A	

---

\* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.