

Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy
LXXIII Egzamin dla Aktuariuszy z 7 marca 2016 r.

Część I

Matematyka finansowa

WERSJA TESTU A

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej:

.....

Czas egzaminu: 100 minut

1. Pracownik rozpoczyna karierę zawodową w chwili $T = 0$ i przechodzi na emeryturę w chwili $T = 40$. Przez MW_n oznaczmy miesięczne wynagrodzenie pracownika w n -tym roku pracy (zakładamy, że wynagrodzenie jest stałe w ciągu roku). Kształtuje się ono zgodnie z poniższym wzorem:

$$MW_n = \begin{cases} 4000 & n = 1 \\ (1 + w) \cdot MW_{n-1} & 1 < n < 21 \\ (1 + s) \cdot MW_{n-1} & n > 20 \end{cases}$$

Pracownik oszczędza na świadczenie emerytalne w dwóch planach emerytalnych:

- w pierwszym z nich (agresywnym) składka płacona jest na koniec każdego roku pracy n oraz wynosi 10% kwoty sumarycznego wynagrodzenia pracownika w danym roku. Ponadto, na koniec każdego roku (jeszcze przed otrzymaniem składki za ten rok) dotychczas zgromadzona kwota zwiększana jest o 5% z tytułu zwrotu z inwestycji;
- w drugim planie (bezpiecznym) składka płacona jest na koniec każdego roku pracy oraz wynosi 10% kwoty sumarycznego wynagrodzenia pracownika w danym roku. Ponadto, na koniec każdego roku (jeszcze przed otrzymaniem składki za ten rok) dotychczas zgromadzona kwota zwiększana jest o 3% z tytułu zwrotu z inwestycji

Niech KE_n opisują sumaryczny kapitał emerytalny zgromadzony na obu planach na koniec roku n (wartość już po dopisaniu kwoty wynikającej ze zwrotu z inwestycji i po wpłaceniu składki należnej za rok n). Emerytura wyznaczana w momencie końca pracy wynosi:

$$E = \frac{KE_{40}}{12 \cdot TZ},$$

gdzie TZ opisuje średnie trwanie życia w latach w momencie przejścia na emeryturę.

Przyjmując $TZ = 16.88$ oraz $w = 5\%$, $s = -1\%$, proszę wyznaczyć (podając najbliższą wartość) stopę zastąpienia w momencie przejścia na emeryturę, tj. kwotę

$$\frac{E}{MW_{40}}.$$

- A) 40%
- B) 55%
- C) 70%
- D) 85%
- E) 100%

2. Niech $T_0 = 0$. Na rynku Blacka-Scholesa akcja A ma cenę 100 PLN. W skali roku oczekiwany zwrot wynosi $\mu = 3\%$, natomiast współczynnik zmienności $\sigma = 10\%$. Proszę wyznaczyć 99% przedział ufności dla ceny akcji A za 3 miesiące (proszę podać najbliższą odpowiedź).

A) (90.5 – 112.5)

B) (89.5 – 113.5)

C) (88.5 – 114.5)

D) (87.5 – 115.5)

E) (86.5 – 116.5)

3. W chwili $t = 0$ firma ubezpieczeniowa ABC otrzymała od ubezpieczonego składkę w wysokości 1 000 PLN. Umowa ubezpieczenia zobowiązuje firmę ABC do wypłaty ubezpieczonemu kwoty $K = 2\,000$ PLN w chwili $T = 17$.

Firma ABC stosuje strategię inwestycyjną, przy której zwrot z inwestycji w roku n opisywany jest przez zmienną losową R_n , której wartość oczekiwana i odchylenie standardowe wynoszą 5%. Przyjmujemy, że zmienne losowe opisujące roczne stopy zwrotu w kolejnych latach są niezależne, a $1 + R_n$ mają rozkład lognormalny.

Prawdopodobieństwo, iż kwota, którą firma ubezpieczeniowa dysponować będzie w chwili $T = 17$ (przed samą wypłatą zobowiązania) będzie mniejsza niż $90\% \cdot K$ wynosi (proszę podać najbliższą wartość):

- A) 8.85%
- B) 9.85%
- C) 10.85%
- D) 11.85%
- E) 12.85%

-
4. Rozważmy n -letnią obligację o nominale 1 000 PLN płacącą roczne kupony w wysokości 4% nominału. Niech $d(n)$ oznacza *duration* rozważanej obligacji wyznaczone w oparciu o roczną stopę wolną od ryzyka wynoszącą 5%. Wówczas, $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(n)$ wynosi (proszę podać najbliższą odpowiedź):

- A) 20
- B) 21
- C) 25
- D) 26
- E) $+\infty$

5. Funkcja intensywności oprocentowania rachunku w chwili t dla kwoty zainwestowanej w chwili s , $0 \leq s \leq t$, wynosi $\delta(s, t) = (1 + s + 2t)^{-1}$. Rozważmy następujące strategie inwestycyjne realizowane w horyzoncie czasu $[0, 2]$:

- kwota $K(0)$ inwestowana jest w chwili 0 i utrzymywana na rachunku do chwili 2,
- kwota $K(0)$ inwestowana jest w chwili 0, następnie w chwili 1 wypłacana jest jej zakumulowana wartość, która natychmiast jest reinwestowana na tym samym rachunku (zgodnie z zadaną intensywnością oprocentowania).

Niech $K_1(2)$ i $K_2(2)$ oznaczają zakumulowane na tym rachunku na koniec inwestycji kwoty dla pierwszej i drugiej z wymienionych strategii odpowiednio. Stosunek tych kwot, tzn.

$K_1(2)/K_2(2)$ wynosi (proszę podać najbliższą odpowiedź):

- A) 0.85
- B) 0.95
- C) 1.05
- D) 1.15
- E) 1.25

6. Spółka z branży naftowej emituje 3-letnią obligację zerokuponową, która w momencie zapadalności wypłaci 1 000 USD. Obligacja ta w momencie emisji jest wyceniana przez rynek na 800 USD. W tym samym momencie spółka emituje analogiczną obligację zerokuponową, która dodatkowo wypłaci w momencie zapadalności premię zależną od kursu baryłki ropy. Premia ta jest pomnożoną przez 100 nadwyżką kursu baryłki ropy w momencie zapadalności obligacji ponad 60 USD, przy czym nadwyżka kursu ograniczona jest do 20 USD (tzn. premia nie może przekroczyć 2 000 USD). Inwestor posiada następujące kwotowania wygasających za dwa lata europejskich opcji na baryłkę ropy:

Typ opcji:	Cena wykonania USD	Cena opcji USD
Kupna	60.00	16.20
Kupna	80.00	11.70
Sprzedazy	60.00	17.90
Sprzedazy	80.00	30.60

Jaką, co najwyżej, cenę jest skłonny zapłacić inwestor za obligację z premią? Proszę podać najbliższą odpowiedź.

- A) 970 USD
- B) 1 250 USD
- C) 1 420 USD
- D) 2 070 USD
- E) 2 690 USD

7. Zakład ubezpieczeń będzie wypłacał świadczenia ubezpieczeniowe w formie rent pewnych przez okres 25 lat. Renty te są płatne w wysokości 1.5 mln PLN na końcu każdego roku przez najbliższe 15 lat oraz w wysokości 2.5 mln PLN na końcu każdego roku przez kolejne 10 lat. Zakład ubezpieczeń ulokował całość swoich rezerw techniczno-ubezpieczeniowych na pokrycie powyższych zobowiązań w 20-letniej obligacji o wartości nominalnej K , ze stałym kuponem rocznym o wartości C .

Wiedząc, że stopa procentowa wynosi 4%, a różnica pomiędzy *duration* powyższych aktywów i pasywów wynosi 1.143, obliczyć stosunek C/K . Proszę podać najbliższą wartość.

- A) 0.041
- B) 0.043
- C) 0.045
- D) 0.047
- E) 0.049

8. Kredyt o wartości K , zaciągnięty na okres 8 lat, jest spłacany ratami płatnymi na końcu każdego roku, przy czym każda następna rata jest o 2% większa od poprzedniej.

O oprocentowaniu kredytu, które jest zmienne, wiadomo, że wynosi:

- 8% w roku 1 i 3,
- 6% w roku 2 i 7,
- 7% w roku 5 i 8.

Ponadto wiadomo, że:

- oprocentowanie w roku 4 i 6 jest takie samo,
- po zapłaceniu 3 raty pozostałe zadłużenie wynosi 129 400,
- wartość kapitału spłaconego w 7 racie wynosi 28 387.

Obliczyć wartość kredytu K . Proszę podać najbliższą wartość.

- A) 140 000
- B) 150 000
- C) 160 000
- D) 170 000
- E) 180 000

9. Inwestor zawarł umowę długoterminowego oszczędzania na okres 10 lat. Umowa gwarantuje inwestorowi oprocentowanie w wysokości 5% od wpłat podstawowych, od momentu dokonania wpłaty do końca okresu umowy, oraz oprocentowanie 6% od wypracowanej nadwyżki wynikającej z uzyskania przychodów z lokowania wpłat podstawowych ponad stopę 5%, od momentu uzyskania nadwyżki do końca okresu umowy.

Inwestor podpisując umowę zadeklarował wysokość rocznej wpłaty, płatnej na początku każdego roku trwania umowy (wpłaty podstawowej), na poziomie R .

Wiedząc, że:

- w okresie 4 pierwszych lat obowiązywania umowy stopa zwrotu z inwestowania środków pochodzących z wpłat podstawowych wynosiła 7%,
- po zakończeniu umowy inwestorowi zostanie wypłacona co najmniej kwota 48 683, obliczyć ile wynosi R .

Proszę podać najbliższą wartość.

- A) 3 300
- B) 3 400
- C) 3 500
- D) 3 600
- E) 3 700

10. Zakład ubezpieczeń w posiadał w okresie 25 kolejnych lat portfel ubezpieczeń o następującej charakterystyce:

- w pierwszym roku była wpłacona składka o wartości 1500, natomiast w każdym następnym roku składka rosła o stałą kwotę X ,
- wyniki techniczne uzyskiwane przez zakład ubezpieczeń w tym portfelu wynosiły:
 - $0.8 \cdot (1500 - 2000)$ w pierwszym roku powyższego okresu,
 - $0.04 \cdot (1500 \cdot 1.2^n - 300)$ dla roku n , w latach 2, 3, ..., 15,
 - $0.03 \cdot (1500 \cdot 1.1^n - 200)$ dla roku n , w latach 16, 17, ..., 25,
- marża zakładu ubezpieczeń ze sprzedaży ubezpieczeń w ramach przedmiotowego portfela rozumiana jako stosunek sumy zdyskontowanych na początek okresu wyników technicznych do sumy zdyskontowanych składek wyniosła 8.9%,
- składka była opłacana na początku każdego roku, a wyniki techniczne za dany rok ustalano na końcu tego roku.

Obliczyć wartość X , przy założeniu, że w całym powyższym okresie stopa oprocentowania była stała i wynosiła 4.5%. Proszę podać najbliższą wartość.

- A) 120
- B) 130
- C) 140
- D) 150
- E) 160

Dystrybuanta rozkładu normalnego $N(0,1)$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
3.6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
3.7	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992
3.8	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995
3.9	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997

Egzamin dla Aktuariuszy z 7 marca 2016 r.**Matematyka finansowa****Arkusz odpowiedzi***

Imię i nazwisko:

Pesel:

OZNACZENIE WERSJI TESTU

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja [♦]
1	E	
2	C	
3	E	
4	B	
5	C	
6	B	
7	E	
8	E	
9	D	
10	C	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.