Zadanie 1.

Niech $N_1, N_2, \ldots$ oznaczają liczby szkód, które zdarzyły się w kolejnych latach, począwszy od roku nr. 1 (przedtem szkód nie było). Zakładamy, że są to niezależne zmienne losowe o jednakowym rozkładzie Poissona o wartości oczekiwanej λ .Każda ze szkód, która zdarzyła się w roku *i*-tym, zostaje zgłoszona w roku $i + D$, gdzie opóźnienie D jest zmienną losową o wartościach 0, 1, 2, ...

Zakładamy, że zmienne losowe opisujące opóźnienie są dla wszystkich szkód niezależne i mają jednakowy rozkład prawdopodobieństwa, o którym wiemy że:

- $\Pr(D > n) > 0$ dla dowolnego *n* (nie istnieje „maksymalne możliwe opóźnienie”)
- $\lim_{n\to\infty} \Pr(D > n) = 0$ (każda szkoda w końcu kiedyś zostanie zgłoszona)

Niech $Z_1, Z_2, \ldots$ oznaczają liczby szkód zgłoszonych w kolejnych latach.

Dla dowolnych Z_i, Z_j, gdzie $i = 1, 2, \ldots,$ $j = 1, 2, \ldots,$ $i \neq j$ prawdą jest, że:

(A) $E(Z_i) = VAR(Z_i) < \lambda$ i $COV(Z_i, Z_j) = 0$

(B) $VAR(Z_i) < E(Z_i) < \lambda$ i $COV(Z_i, Z_j) = 0$

(C) $E(Z_i) = VAR(Z_i) < \lambda$ i $COV(Z_i, Z_j) > 0$

(D) $E(Z_i) < VAR(Z_i) < \lambda$ i $COV(Z_i, Z_j) < 0$

(E) $E(Z_i) < VAR(Z_i) = \lambda$ i $COV(Z_i, Z_j) = 0$

Zadanie 2.

$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0,1]$. N jest zmienną losową o rozkładzie Poissona z parametrem częstotliwości λ, niezależną od zmiennych Y_i. Niech:

$$M = \begin{cases} \max\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_N\} & gdy \quad N > 0 \\ 0 & gdy \quad N = 0 \end{cases}$$

Warunkowa wartość oczekiwana $E(N|M)$ wynosi:

(A) $\begin{cases} \lambda \cdot M & gdy \quad M > 0 \\ 0 & gdy \quad M = 0 \end{cases}$

(B) $1 + \lambda \cdot M$

(C) $\begin{cases} 1 + \lambda \cdot M & gdy \quad M > 0 \\ 0 & gdy \quad M = 0 \end{cases}$

(D) $e^{\lambda \cdot M}$

(E) $\begin{cases} e^{\lambda \cdot M} & gdy \quad M > 0 \\ 0 & gdy \quad M = 0 \end{cases}$

Zadanie 3.

Niech przy danej wartości parametru λ łączna wartość szkód w portfelu liczącym n ryzyk:

$$S(n) = Y_1 + \ldots + Y_{N(n)},$$

ma złożony rozkład Poissona o częstotliwości równej $n \cdot \lambda$ i rozkładzie pojedynczego składnika o parametrach:

$$E(Y) = \mu$$

$$VAR(Y) = \mu^2.$$

Parametr λ rozkładu ilości szkód $N(n)$ pochodzi z rozkładu zmiennej losowej Λ, o którym wiemy, że:

$$E(\Lambda) = L$$

$$VAR(\Lambda) = A^2$$

Kwadrat współczynnika zmienności zmiennej $S(n)$, to znaczy iloraz:

$$\frac{VAR(S(n))}{[E(S(n))]^2},$$

Dany jest wzorem:

(A) $\dfrac{2 \cdot L + A^2}{n \cdot L^2}$

(B) $\dfrac{\frac{2}{n} \cdot L + A^2}{L^2}$

(C) $\dfrac{\frac{2}{n} \cdot L + 2 \cdot A^2}{L^2}$

(D) $\dfrac{L + A^2}{n \cdot L^2}$

(E) $\dfrac{\frac{1}{n} \cdot L + A^2}{L^2}$

Zadanie 4.
Łączna wartość szkód w portfelu liczącym *n* ryzyk:

$S(n) = Y_1 + \ldots + Y_{N(n)}$,

ma złożony rozkład Poissona o częstotliwości równej $0.1 \cdot n$ i rozkładzie pojedynczego składnika o dystrybuancie:

$F_Y(y) = 1 - e^{-0.01y}$.

Niech teraz zmienna $R(n)$ oznacza łączną wartość nadwyżek każdej ze szkód ponad wartość 100, pokrywaną przez reasekuratora:

$R(n) = \max\{(Y_1 - 100), \quad 0\} + \ldots + \max\{(Y_{N(n)} - 100), \quad 0\}$

Kwadrat współczynnika zmienności zmiennej $R(n)$, to znaczy iloraz:

$\dfrac{VAR(R(n))}{[E(R(n))]^2}$,

Dany jest wzorem:

(A) $20 \cdot \dfrac{e^{-1}}{n}$

(B) $2 \cdot \dfrac{e^{-1}}{n}$

(C) $10 \cdot \dfrac{e^{-1}}{n}$

(D) $10 \cdot \dfrac{e}{n}$

(E) $20 \cdot \dfrac{e}{n}$

Zadanie 5.
Pewne ryzyko generuje szkody zgodnie z procesem Poissona z częstotliwością $\lambda = 1$ rocznie. Wartości poszczególnych szkód są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie:

Wartość szkody	1	2	3	4
prawdopodobieństwo	0.48	0.24	0.16	0.12

Niech X oznacza łączną wartość szkód w okresie 25 miesięcy (dokładnie: dwadzieścia pięć dwunastych roku).
$\Pr(X \leq 5)$ wynosi:

(A) $4.8 \cdot \exp\left(-2\tfrac{1}{12}\right)$

(C) $5.2 \cdot \exp\left(-2\tfrac{1}{12}\right)$

(D) $5.5 \cdot \exp\left(-2\tfrac{1}{12}\right)$

(D) $5.8 \cdot \exp\left(-2\tfrac{1}{12}\right)$

(E) $6.0 \cdot \exp\left(-2\tfrac{1}{12}\right)$

Zadanie 6.

Kierowca, którego charakteryzuje wartość q parametru ryzyka Q, zgłasza szkody (jedną lub więcej) w ciągu roku z prawdopodobieństwem q, zaś nie zgłasza szkód z prawdopodobieństwem $p = 1 - q$, przy czym zdarzenia te w kolejnych latach są zdarzeniami niezależnymi. Rozkład parametru ryzyka Q w populacji kierowców jest na przedziale $(0, 1)$ dany gęstością:

$$f_Q(x) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1 - x)^{\beta-1}$$

Zakładamy, że populacja jest zamknięta (starzy kierowcy nie znikają, nowi się nie pojawiają). Kierowcy migrują pomiędzy klasami bardzo prostego, 4-klasowego systemu bonus-malus. W systemie tym każdy kierowca, który w danym roku zgłosił jedną lub więcej szkód, ląduje w roku następnym w klasie pierwszej (z najwyższą składką). Jeśli jednak nie zgłosił żadnej szkody, wtedy:

- Ląduje w klasie 2, o ile w danym roku był w klasie 1;
- Ląduje w klasie 3, o ile w danym roku był w klasie 2;
- Ląduje w klasie 4, o ile w danym roku był w klasie 3 lub 4.

Wiadomo, że rozkład prawdopodobieństwa na przestrzeni klas dla dowolnego kierowcy w takim systemie bonus-malus stabilizuje się (przestaje zależeć od klasy startowej) po upływie kilku pierwszych lat.

Załóżmy, że po osiągnięciu tej stabilizacji frakcje kierowców przebywających w klasach 1,2,3,4 wynoszą odpowiednio: 1/5, 2/15, 2/21, 4/7.

Prawdopodobieństwo warunkowe wygenerowania szkody w ciągu roku przez kierowcę, który przebywa w tym roku w klasie 4, (po osiągnięciu przez system ww. stabilizacji) wynosi:

(A) $1/5$

(B) $1/6$

(C) $1/7$

(D) $2/15$

(E) $1/8$

Zadanie 7.

Rozważmy proces nadwyżki ubezpieczyciela z kontrolą wypłacalności raz do roku:

$U_n = u + c \cdot n - S_n$,

gdzie:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} W_i ,$$

$W_1, W_2, \ldots$ są łącznymi wartościami szkód za rok pierwszy, drugi,... .

W_i to niezależne zmienne losowe o identycznym rozkładzie Gamma o wartości oczekiwanej równej 3 i wariancji równej także 3.

Roczna składka wynosi: $c = \ln 64$.

Współczynnik przystosowania (*adjustment coefficient*) *R* dla tego procesu wynosi:

(A) 0.667

(B) 0.586

(C) 0.500

(D) 0.442

(E) 0.333

Zadanie 8.

Rozważamy klasyczny model nadwyżki ubezpieczyciela:

- $U(t) = u + ct - \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k$, gdzie:
- u to nadwyżka początkowa,
- c to intensywność składki
- $Y_1, Y_2, Y_3, \dots$ to zmienne losowe i.i.d. reprezentujące wartości kolejnych szkód
- $N(t)$ to poissonowski proces zliczający pojawiające się szkody, niezależny od ich wartości $Y_1, Y_2, Y_3, \dots$, o intensywności równej λ.

Rozkład wartości pojedynczej szkody dany jest na półosi dodatniej gęstością:

$$f(x) = \frac{1}{48}\left(10\exp\left(-\frac{1}{4}x\right) + \exp\left(-\frac{1}{8}x\right)\right)$$

zaś wartości parametrów procesu wynoszą $c = 600$, $\lambda = 100$.

Przy przyjętych założeniach prawdopodobieństwo ruiny jako funkcja nadwyżki początkowej wyraża się wzorem:

$$\Psi(u) = a_1 \exp(-r_1 u) + a_2 \exp(-r_2 u)$$

Zadanie znalezienia parametrów tego wzoru częściowo zostało już wykonane. Okazało się mianowicie, że $r_1 = 1/24$, zaś $r_2 = 1/6$. Znajdź wartości pozostałych parametrów, i podaj wynik w odniesieniu do a_2.

(A) $a_2 = 1/9$

(B) $a_2 = 2/27$

(C) $a_2 = 1/18$

(D) $a_2 = 1/27$

(E) $a_2 = 1/36$

Zadanie 9.
W pewnym rodzaju ubezpieczenia każda polisa generuje szkodę (co najwyżej jedną) z takim samym prawdopodobieństwem. Jeśli do szkody dojdzie, jej wartość Y - przy danej wartości β parametru ryzyka B – jest dodatnią zmienną losową o gęstości wykładniczej:

$$f_{Y|B=\beta}(y) = \beta \cdot e^{-\beta \cdot y}.$$

Populacja polis charakteryzuje się jednak dużym zróżnicowaniem parametru ryzyka B. Jeśli przyjmiemy, iż rozkład tego parametru w populacji polis ma na półosi dodatniej gęstość gamma postaci:

$$g_B(\beta) = \beta e^{-\beta},$$

to dla losowo dobranego ryzyka z populacji, warunkowa wartość oczekiwana szkody (pod warunkiem że do niej dojdzie) wyniesie:

(A) 1

(B) $\frac{3}{2}$

(C) 2

(D) 3

(E) ∞

Zadanie 10.

Proces nadwyżki ubezpieczyciela jest złożonym procesem Poissona, w którym θ to stosunkowy narzut bezpieczeństwa na składkę netto (dodatni), L to maksymalna całkowita strata, a l_1 to wartość, o którą nadwyżka spada po raz pierwszy poniżej poziomu wyjściowego (o ile do takiego spadku dochodzi). Oczywiście zachodzi $L = l_1 + \cdots + l_N$, gdzie N to liczba spadków procesu nadwyżki poniżej dotychczas osiągniętego minimum.

Jeżeli l_1 ma rozkład o gęstości równej:

$\frac{1}{3}$	dla $0 \le x < 2$
$\frac{1}{6}$	dla $2 \le x < 4$
0	dla pozostałych x

to funkcja generująca momenty $M_L(r)$ dla r nierównego zeru wynosi:

(A) $$\frac{\theta \cdot r}{1 + r(1+\theta) - \frac{1}{6}e^{2r}(e^{2r}+1)}$$

(B) $$\frac{\theta \cdot r}{1 + r(1+\theta) - \frac{1}{6}e^{2r}(e^{2r}-1)}$$

(C) $$\frac{3 \cdot \theta \cdot r}{1 + 3r(1+\theta) - \frac{1}{2}e^{2r}(e^{2r}+1)}$$

(D) $$\frac{\theta \cdot r}{r(1+\theta) - \frac{1}{6}e^{2r}(e^{2r}-1)}$$

(E) $$\frac{\theta \cdot r}{r(1+\theta) - \frac{1}{6}e^{2r}(e^{2r}+1)}$$

Egzamin dla Aktuariuszy z 28 września 2015 r.

Matematyka ubezpieczeń majątkowych

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ : ....K L U C Z   O D P O W I E D Z I........................

~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	A	
2	C	
3	B	
4	E	
5	D	
6	E	
7	C	
8	D	
9	A	
10	C	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.
♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.