## Zadanie 1

Rozważmy zmienne losowe $N$, $X$, $Y$. Wiadomo, że rozkład warunkowy zmiennej losowej $N$, gdy $X = x$ i $Y = y$ jest rozkładem Poissona o wartości oczekiwanej $x$. Rozkład warunkowy zmiennej losowej $X$, gdy $Y = y$ jest rozkładem $Gamma(2, y)$, a rozkład zmiennej $Y$ jest rozkładem $Gamma(5,3)$, gdzie rozkład $Gamma(\alpha, \beta)$ ma gęstość

$$p_{\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} & gdy \ \ x > 0 \\ 0 & gdy \ \ x \le 0. \end{cases}$$

Wtedy wariancja $VarN$ jest równa

(A) $\frac{3}{2}$

(B) $\frac{15}{4}$

(C) $\frac{27}{8}$

(D) 3

(E) $\frac{9}{4}$

## Zadanie 2

Załóżmy, że $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie jednostajnym na przedziale (-1,1).

Zmienna losowa $N$ jest niezależna od $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ i ma rozkład ujemny dwumianowy

$$P(N=n) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}\left(\frac{1}{5}\right)^4\left(\frac{4}{5}\right)^n \text{ gdy } n = 0,1,2,\ldots.$$

Niech

$$Y_i = \min\left\{X_i, \frac{1}{2}\right\}, \qquad Z_i = X_i - Y_i.$$

Niech

$$S^{(Y)} = \sum_{i=1}^{N} Y_i, \qquad S^{(Z)} = \sum_{i=1}^{N} Z_i.$$

Oblicz $Cov\left(S^{(Y)}, S^{(Z)}\right)$.

(A) $-\frac{6}{16}$

(B) $-\frac{1}{16}$

(C) $\frac{9}{16}$

(D) $\frac{12}{16}$

(E) $\frac{4}{16}$

**Zadanie 3**

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu normalnego $N(\mu, \sigma^2)$, gdzie oba parametry są nieznane. Estymując parametr $m = E(X^2)$ wyznaczono dwa estymatory:

$$T_1 = \bar{X}^2 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2 ,$$

$$T_2 = \bar{X}^2 + \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2 ,$$

gdzie $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ .

Różnica błędów średniokwadratowych estymatora $T_1$ i estymatora $T_2$ jest równa

(A) $\dfrac{\sigma^4(3-5n)}{n^2(n-1)}$

(B) $\dfrac{\sigma^4(n-3)}{n^2(n-1)}$

(C) $\dfrac{2\sigma^4}{n^2(n-1)}$

(D) $\dfrac{2\sigma^4(1-2n)}{n^2(n-1)}$

(E) $\dfrac{\sigma^4(1-3n)}{n^2(n-1)}$

## Zadanie 4

Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ są niezależne o jednakowym rozkładzie

$$P(X_n = 0) = P(X_n = 1) = P(X_n = 2) = P(X_n = 3) = \frac{1}{4}.$$

Niech $Y_0 = 3$ oraz niech dla $n = 1,2,3,\ldots$ zachodzi

$$Y_n = \begin{cases} 3 & gdy \quad X_n = 3 \\ \min(Y_{n-1}, X_n) & gdy \quad X_n < 3 \end{cases}$$

Oblicz $\lim\limits_{n \to +\infty} E(Y_n Y_{n-1})$

(A) $\frac{35}{24}$

(B) 1

(C) $\frac{21}{24}$

(D) $\frac{19}{12}$

(E) $\frac{13}{12}$

**Zadanie 5**

Obserwujemy pary $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots, (X_{20}, Y_{20})$ zmiennych losowych. Zmienne $X_1, X_2, \ldots, X_{20}$ są zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym $N(m_x, 1)$, a zmienne $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{20}$ o rozkładzie normalnym $N(m_y, \sigma^2)$, gdzie $\sigma^2 = 4$. Zakładając, że wszystkie zmienne są niezależne zbudowano test najmocniejszy hipotezy:
$H_0:\ (m_x, m_y) = (0,\ 0)$
przeciw alternatywie:
$H_1: (m_x, m_y) = (1,\ 1)$,
na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ .
Wyznaczyć rozmiar testu, jeśli w rzeczywistości pary $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots, (X_{20}, Y_{20})$ są niezależne, ale zmienne losowe $(X_i, Y_i)$, $i = 1, 2, \ldots, 20$, przy prawdziwości hipotezy $H_0$, mają rozkłady normalne o macierzy kowariancji $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$.

(A) 0,123

(B) 0,067

(C) 0,082

(D) 0,017

(E) 0,010

**Zadanie 6**

Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu Pareto o gęstości

$$p_{\theta,\lambda}(x) = \begin{cases} \dfrac{\theta\lambda^{\theta}}{(\lambda + x)^{\theta+1}} & \text{gdy } x > 0 \\ 0 & \text{gdy } x \le 0 \end{cases}$$

gdzie $\lambda, \theta > 0$ są nieznanymi parametrami. Niech $\hat{\theta}_n, \hat{\lambda}_n$ będą estymatorami tych parametrów otrzymanymi metodą największej wiarogodności w oparciu o próbę $n$ elementową. Chcemy dobrać stałą $t$ tak, aby przy $n$ dążącym do nieskończoności prawdopodobieństwo zdarzenia $\left|\frac{\hat{\theta}_n}{\hat{\lambda}_n} - \frac{\theta}{\lambda}\right|\sqrt{n} < t$ było równe 0,9.

Jeżeli $\theta = 3$ i $\lambda = 1$, to stała $t$ jest równa

(A) 4,35

(B) 6,27

(C) 8,06

(D) 11,52

(E) 3,82

**Zadanie 7**

W urnie znajdują się trzy kule białe i dwie czarne. Powtarzamy następujące doświadczenie: losujemy z urny kulę, odkładamy na bok i dorzucamy do urny kulę białą. Dopiero po trzykrotnym powtórzeniu doświadczenia w urnie nie było kul czarnych. Obliczyć prawdopodobieństwo, że w pierwszym doświadczeniu wylosowano kulę czarną.

(A) $\frac{3}{4}$

(B) $\frac{3}{7}$

(C) $\frac{6}{125}$

(D) $\frac{8}{125}$

(E) $\frac{4}{7}$

## Zadanie 8

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie z gęstością

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \theta^2 x e^{-\theta x} & gdy \;\; x > 0 \\ 0 & gdy \;\; x \le 0 \end{cases},$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Rozważamy estymator funkcji $g(\theta) = P_\theta(X_1 > 1)$ postaci $\hat{g}(T) = P(X_1 > 1 | T)$, gdzie $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Jeżeli zaobserwowano $T = t > 1$, to $\hat{g}(t)$ jest równe

(A) $\left(\dfrac{t-1}{t}\right)^n$

(B) $\left(\dfrac{t-1}{t}\right)^{n-1}$

(C) $\left(\dfrac{t-1}{t}\right)^{n-1}\left(\dfrac{n-1}{t}+1\right)$

(D) $\left(\dfrac{t-1}{t}\right)^{2n}\left(\dfrac{2n}{t}+1\right)$

(E) $\left(\dfrac{t-1}{t}\right)^{2n-2}\left(\dfrac{2n-2}{t}+1\right)$

**Zadanie 9**

Przez 5 dni przeprowadzano egzaminy. Każdego dnia z puli 100 różnych pytań egzaminacyjnych losowano bez zwracania 20 pytań. Oblicz wartość oczekiwaną liczby pytań, które zostały wylosowane dokładnie 3 razy.

(A) 4,25

(B) 5,12

(C) 10

(D) 6,75

(E) 8,24

**Zadanie 10**

Niech $X_1, X_2, ..., X_6$ będzie próbką z rozkładu wykładniczego o gęstości określonej dla $x > 0$ wzorem:

$$f_\lambda(x) = \lambda \ \exp(-\lambda \, x),$$

gdzie $\lambda > 0$ jest nieznanym parametrem.

Nie obserwujemy dokładnych wartości zmiennych $X_i$, tylko wartości *zaokrąglone w górę* do najbliższej liczby całkowitej. Innymi słowy, dane są wartości zmiennych losowych $Z_1, Z_2, ..., Z_6$, gdzie

$$Z_i = \lceil X_i \rceil.$$

(symbol $\lceil a \rceil$ oznacza najmniejszą liczbą całkowitą $k$ taką, że $a \le k$ ).

Wyznaczono estymator *największej wiarogodności* $\hat{\lambda}$ nieznanego parametru $\lambda$ oparty na obserwacjach $Z_1, Z_2, ..., Z_6$.

Jeżeli $\lambda = 1$, to prawdopodobieństwo $P(\hat{\lambda} > 1{,}9)$ jest równe

(A) 0,205

(B) 0,064

(C) 0,141

(D) 0,632

(E) 0,087

# Egzamin dla Aktuariuszy z 28 września 2015 r.

## Prawdopodobieństwo i Statystyka

### Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : ......................................................

Pesel ...........................................

| Zadanie nr | Odpowiedź | Punktacja♦ |
|---|---|---|
| 1 | B | |
| 2 | E | |
| 3 | A | |
| 4 | D | |
| 5 | C | |
| 6 | C | |
| 7 | E | |
| 8 | E | |
| 9 | B | |
| 10 | A | |
| | | |

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.
♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.