

Zadanie 1.

Niech X_1 będzie zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na przedziale $(0,1)$, X_2 zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na przedziale $(0, X_1)$, X_3 zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na przedziale $(0, X_2)$ i tak dalej. Niech N oznacza zmienną losową o rozkładzie geometrycznym

$$P(N = n) = (1-q)q^{n-1} \quad \text{gdy } n = 1, 2, 3, \dots,$$

gdzie $q \in (0,1)$ jest ustaloną liczbą. Zmienna N jest niezależna od zmiennych X_1, X_2, X_3, \dots .

Obliczyć $E(X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_N)$.

(A) $\frac{1-q}{q^2}(e^q - 1 - q)$

(B) $\frac{1-q}{q}(e^q - 1)$

(C) $\frac{2(1-q)}{q(2-q)}$

(D) $\frac{1-q}{2-q}$

(E) $(1-q)e^q$

Zadanie 2.

Zmienna losowa (X, Y, Z) ma rozkład normalny z wartością oczekiwaną $EX = 0$, $EY = 2$, $EZ = 1$ i macierzą kowariancji

$$\begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Obliczyć $Var(X(Y - 2Z))$.

(A) $\frac{13}{4}$

(B) $\frac{17}{4}$

(C) $\frac{5}{4}$

(D) $\frac{9}{4}$

(E) 2

Zadanie 3.

Zmienna losowa X ma rozkład Weibulla o gęstości

$$p_{\theta}(x) = \begin{cases} 2\theta x \exp(-\theta x^2) & \text{gdy } x > 0 \\ 0 & \text{gdy } x \leq 0 \end{cases},$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Statystyk nie obserwuje zmiennej X , uzyskuje tylko informację, gdy zmienna X przekroczy wartość d , a mianowicie obserwuje zmienną Y równą X , gdy zmienna X jest większa niż d . W wyniku takiej obserwacji uzyskuje prostą próbę losową Y_1, Y_2, \dots, Y_k , $k > 2$. Wartość oczekiwana estymatora największej wiarygodności parametru θ uzyskanego na podstawie próby losowej Y_1, Y_2, \dots, Y_k jest równa

- (A) θ
- (B) $\frac{k}{k-2}\theta$
- (C) $\frac{k-2}{k}\theta$
- (D) $\frac{k-1}{k}\theta$
- (E) $\frac{k}{k-1}\theta$

Zadanie 4.

Założmy, że niezależne zmienne losowe X_1, X_2, X_3, X_4 mają rozkłady wykładnicze o wartościach oczekiwanych $EX_1 = 1$, $EX_2 = EX_3 = EX_4 = 2$.

Obliczyć $P(X_1 = \max\{X_1, X_2, X_3, X_4\})$.

(A) $\frac{5}{35}$

(B) $\frac{1}{5}$

(C) $\frac{1}{10}$

(D) $\frac{16}{35}$

(E) $\frac{1}{30}$

Zadanie 5.

Niech (X, Y) będzie dwuwymiarową zmienną losową o funkcji gęstości

$$f(x, y) = \begin{cases} 8xy & \text{gdy } y > 0 \text{ i } x > 0 \text{ i } x^2 + y^2 < 1 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Niech $V = \frac{X^2}{X^2 + Y^2}$ i $Z = X^2 + Y^2$. Wtedy

- (A) zmienne X i Y są niezależne
- (B) funkcja gęstości rozkładu brzegowego zmiennej V wyraża się wzorem $g(v) = 2v$ dla $v \in (0,1)$
- (C) funkcja gęstości rozkładu brzegowego zmiennej V wyraża się wzorem $g(v) = 1$ dla $v \in (0,1)$
- (D) $Cov(Z, V) = \frac{1}{6}$
- (E) funkcja gęstości rozkładu brzegowego zmiennej Z wyraża się wzorem $h(z) = 1$ dla $z \in (0,1)$

Zadanie 6.

Niech $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots, X_{n+m}$, $m, n > 1$, będzie próbką losową z rozkładu normalnego $N(\mu, \sigma^2)$, gdzie oba parametry są nieznanne. Bezpośrednio dostępne są tylko obserwacje X_1, X_2, \dots, X_n , ale dodatkowo znamy średnią $\bar{X}_{n+m} = \frac{1}{m+n} \sum_{i=1}^{n+m} X_i$.

Budujemy estymator parametru σ^2 postaci $T = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_{n+m})^2$. Obciążenie tego estymatora, czyli wielkość $ET - \sigma^2$ jest równa

(A) $\frac{m}{(n-1)(n+m)} \sigma^2$

(B) $\frac{n}{(n-1)(n+m)} \sigma^2$

(C) $\frac{n+m-1}{(n-1)(n+m)} \sigma^2$

(D) $\frac{-1}{n+m} \sigma^2$

(E) $\frac{-1}{n} \sigma^2$

Zadanie 7.

Niech X_1, X_2, \dots, X_6 będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie normalnym z wartością oczekiwaną 0 i wariancją $\frac{1}{\theta}$, gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Zakładamy, że parametr θ ma rozkład a priori o gęstości

$$p(\theta) = \begin{cases} \beta^2 \theta \exp(-\beta\theta) & \text{gd}y \ \theta > 0 \\ 0 & \text{gd}y \ \theta \leq 0 \end{cases},$$

gdzie $\beta > 0$ jest znane. Wyznaczamy bayesowski przedział ufności dla parametru $\frac{1}{\theta}$ postaci $[a, b]$, taki że

$$\Pi\left(\frac{1}{\theta} < a \mid x\right) = \Pi\left(\frac{1}{\theta} > b \mid x\right) = 0,05,$$

gdzie $\Pi(\cdot \mid x)$ oznacza prawdopodobieństwo przy rozkładzie a posteriori, gdy zaobserwowana wartość próbki losowej jest równa $x = (x_1, x_2, \dots, x_6)$. Tak otrzymany przedział jest równy

$$(A) \left[\frac{2\beta + \sum_{i=1}^6 x_i^2}{26,296}, \frac{2\beta + \sum_{i=1}^6 x_i^2}{7,962} \right]$$

$$(B) \left[\frac{2\beta + \sum_{i=1}^6 x_i^2}{18,307}, \frac{2\beta + \sum_{i=1}^6 x_i^2}{3,940} \right]$$

$$(C) \left[\frac{2\beta + \sum_{i=1}^6 x_i^2}{36,614}, \frac{2\beta + \sum_{i=1}^6 x_i^2}{7,881} \right]$$

$$(D) \left[\frac{2\beta + \sum_{i=1}^6 x_i^2}{22,141}, \frac{2\beta + \sum_{i=1}^6 x_i^2}{2,291} \right]$$

$$(E) \left[\frac{2\beta + \sum_{i=1}^6 x_i^2}{11,071}, \frac{2\beta + \sum_{i=1}^6 x_i^2}{1,146} \right]$$

Zadanie 8.

Zakładamy, że zależność czynnika Y od czynnika x (nielosowego) opisuje model regresji liniowej $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$, gdzie błędy ε_i są niezależne i mają rozkłady normalne o wartości oczekiwanej 0 i wariancji 4. Obserwujemy zmienne losowe Y_1, Y_2, \dots, Y_n przy danych wartościach x_1, x_2, \dots, x_n . Test najmocniejszy dla weryfikacji hipotezy

$$H_0 : \beta_0 = 1 \text{ i } \beta_1 = 1$$

przy alternatywie

$$H_1 : \beta_0 = -1 \text{ i } \beta_1 = 2$$

na poziomie istotności 0,05 odrzuca hipotezę H_0 , gdy spełniona jest nierówność

$$(A) \quad \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - x_i - 1)(x_i - 2)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - 2)^2}} > 3,290$$

$$(B) \quad \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - x_i - 1)x_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}} > 1,645$$

$$(C) \quad \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - x_i - 1)(2 - x_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - 2)^2}} > 3,290$$

$$(D) \quad \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - x_i - 1)(2 - x_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - 2)^2}} > 1,645$$

$$(E) \quad \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - x_i - 1)x_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}} > 3,290$$

Zadanie 9.

Zmienne losowe Z_1, Z_2, \dots, Z_n i $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ są niezależne. Każda ze zmiennych losowych Z_i ma jednakowy rozkład prawdopodobieństwa $P(Z_i = 1) = p = 1 - P(Z_i = 0)$. Każda ze zmiennych losowych (X_i, Y_i) ma jednakowy rozkład prawdopodobieństwa taki, że $EX_i = EY_i = m$ i $VarX_i = \sigma^2$, $VarY_i = 4\sigma^2$ i współczynnik korelacji $Corr(X_i, Y_i) = \rho$. Niech $\bar{S}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i X_i$ i $\bar{T}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i Y_i$.

Zbadać zbieżność rozkładów prawdopodobieństwa zmiennych

$$(\bar{S}_n - \bar{T}_n)\sqrt{n} \text{ przy } n \rightarrow +\infty$$

- (A) $(S_n - T_n)\sqrt{n} \rightarrow N(0, 2p(1-p)\sigma^2(5-2\rho))$
- (B) $(S_n - T_n)\sqrt{n} \rightarrow N(0, p\sigma^2(5-2\rho))$
- (C) $(S_n - T_n)\sqrt{n} \rightarrow N(0, p^2\sigma^2(5-4\rho))$
- (D) $(S_n - T_n)\sqrt{n} \rightarrow N(0, p\sigma^2(5-4\rho))$
- (E) $(S_n - T_n)\sqrt{n}$ nie jest ciągiem zbieżnym do rozkładu normalnego

Zadanie 10.

Wylosowano niezależnie 14 liczb z rozkładu symetrycznego ciągłego i ustawiono je w ciąg według kolejności losowania. Otrzymano 8 liczb dodatnich (każdą z nich oznaczmy symbolem a) i 6 ujemnych (każdą z nich oznaczmy symbolem b). Obliczyć prawdopodobieństwo, że otrzymano 6 serii, gdzie serią nazywamy ciąg elementów jednego typu, przed i za którym występuje element drugiego typu, na przykład w ciągu : $aaabbbbaabbbba$ jest 5 serii (3 serie elementów typu a i 2 serie elementów typu b).

(A) $\frac{30}{143}$

(B) $\frac{40}{143}$

(C) $\frac{20}{143}$

(D) $\frac{10}{143}$

(E) $\frac{50}{143}$

Egzamin dla Aktuariuszy z 17 marca 2008 r.**Prawdopodobieństwo i statystyka****Arkuszu odpowiedzi***

Imię i nazwisko :KLUCZ ODPOWIEDZI.....

Pesel

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja ♦
1	A	
2	D	
3	E	
4	C	
5	C	
6	A	
7	B	
8	A	
9	D	
10	C	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.