Zadanie 1

Niech $X_1,...,X_9$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie prawdopodobieństwa:

$$P(X_i = 1) = 3/5 \quad \text{i} \quad P(X_i = -1) = 2/5.$$

Niech $S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$ dla $k = 1,2,...,9$.

Prawdopodobieństwo

$$P(S_9 = 3 \quad i \quad S_1 < 5, S_2 < 5, ..., S_8 < 5)$$

jest równe

(A) 0,2180

(B) 0,2478

(C) 0,2239

(D) 0,2209

(E) 0,2299

Zadanie 2

W urnie znajduje się 10 kul Zielonych, 10 kul Białych i 10 kul Czarnych. Losujemy bez zwracania 9 kul. Niech

- Z oznacza liczbę wylosowanych kul Zielonych,
- B oznacza liczbę wylosowanych kul Białych,
- C oznacza liczbę wylosowanych kul Czarnych.

Wtedy współczynnik kowariancji $Cov(Z, B)$ jest równy

(A) $-\frac{42}{29}$

(B) $-\frac{21}{29}$

(C) $-\frac{21}{30}$

(D) $-\frac{42}{30}$

(E) $-\frac{24}{30}$

Zadanie 3

Niech (X, Y) będzie dwuwymiarową zmienną losową, o wartości oczekiwanej (μ_X, μ_Y), wariancji każdej ze współrzędnych równej σ^2 oraz kowariancji równej $\rho \cdot \sigma^2$. Staramy się obserwować niezależne realizacje tej zmiennej, ale nie w pełni to wychodzi - czasem udaje się zaobserwować jedynie pierwszą lub jedynie drugą ze współrzędnych. Przyjmijmy ważne założenie, iż do „zgubienia" obserwacji (całkowitego, jej pierwszej współrzędnej, lub jej drugiej współrzędnej) dochodzi całkowicie niezależnie od wartości tych obserwacji.
Załóżmy, iż otrzymaliśmy próbkę, zawierającą 25 obserwacji wyłącznie pierwszej współrzędnej, 50 obserwacji całej pary, oraz 25 obserwacji wyłącznie drugiej współrzędnej. Niech:
$\overline{X}$ oznacza średnią z próbki (75-ciu) obserwacji na zmiennej *X*,
$\overline{Y}$ oznacza średnią z próbki (75-ciu) obserwacji na zmiennej *Y*,
$\overline{X-Y}$ oznacza średnią z próbki (50-ciu) obserwacji na różnicy zmiennych $X-Y$;
oraz niech
$(\overline{X}-\overline{Y})$ i $\overline{X-Y}$ oznaczają dwa alternatywne estymatory różnicy $r = (\mu_X - \mu_Y)$.
Różnica błędów średniokwadratowych obu estymatorów czyli

$$E(\overline{X}-\overline{Y}-r)^2 - E(\overline{X-Y}-r)^2$$

jest równa

(A) $\frac{\sigma^2}{75}\left(1-\frac{3}{2}\rho\right)$

(B) $\frac{\sigma^2}{75}(1-\rho)$

(C) $\frac{\sigma^2}{75}\left(\frac{5}{3}\rho-1\right)$

(D) $\frac{\sigma^2}{75}\left(\frac{3}{2}\rho-1\right)$

(E) $\frac{\sigma^2}{75}(\rho-1)$

Zadanie 4

Zakładając, że obserwacje $x_1, x_2, \ldots, x_{12}$ stanowią próbkę losową z rozkładu Pareto o gęstości

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \dfrac{4^\theta \theta}{(4+x)^{\theta+1}} & gdy \quad x > 0 \\ 0 & gdy \quad x \le 0 \end{cases}$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem, wyznaczono wartość estymatora największej wiarogodności parametru θ i otrzymano $\hat{\theta} = 1{,}5$. W próbce były dwie obserwacje o wartości 12, a pozostałe dziesięć obserwacji miało wartości mniejsze od 12. Okazało się, że w rzeczywistości zaobserwowane wartości stanowiły próbkę z uciętego rozkładu Pareto, czyli były realizacjami zmiennych losowych $X_i = \min\{Y_i, 12\}$, gdzie Y_i, $i = 1,2,\ldots,12$, są niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu o gęstości f_θ. Wyznaczyć wartość estymatora największej wiarogodności parametru θ po uwzględnieniu modyfikacji założeń.

(A) 2,04

(B) 1,25

(C) 0,74

(D) 1,05

(E) 1,91

Zadanie 5

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots,\ I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots, N$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi. Zmienne $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ mają rozkład o wartości oczekiwanej 4 i wariancji 1. Zmienne $I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$ mają rozkład jednostajny na przedziale $(0,1)$. Zmienna N ma rozkład ujemny dwumianowy $P(N=n) = \frac{\Gamma(2+n)}{n!}\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^n$ dla $n = 0,1,2,\ldots$.

Niech $S_N = \begin{cases} 0 & gdy\ \ N = 0 \\ \sum_{i=1}^{N} I_i X_i & gdy\ \ N > 0 \end{cases}$.

Wtedy $Var(S_N)$ jest równa

(A) $\frac{26}{9}$

(B) $\frac{10}{9}$

(C) $\frac{65}{18}$

(D) $\frac{14}{3}$

(E) $\frac{32}{9}$

Zadanie 6

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o identycznym rozkładzie o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x^4} & \text{gdy } x > 1 \\ 0 & \text{gdy } x \le 1 \end{cases},$$

Niech $U_n = \left(X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n\right)^{\frac{1}{n}}$. Wtedy

(A) $\lim_{n\to+\infty} P\left((U_n - 1{,}5)\sqrt{n} > \frac{9}{4} \right) = 0{,}1587$

(B) $\lim_{n\to+\infty} P\left((U_n - 1{,}5)\sqrt{n} > 3e^3\right) = 0{,}1587$

(C) $\lim_{n\to+\infty} P\left((U_n - e^{1/3})\sqrt{n} > 3e^{-1/3}\right) = 0{,}1587$

(D) $\lim_{n\to+\infty} P\left((U_n - e^{-1/3})\sqrt{n} > 3e^{1/3}\right) = 0{,}1587$

(E) $\lim_{n\to+\infty} P\left(3(U_n - e^{1/3})\sqrt{n} > e^{1/3}\right) = 0{,}1587$

Zadanie 7

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o identycznym rozkładzie normalnym $N(\mu, \sigma^2)$ z nieznanymi parametrami $\mu \in R$ i $\sigma > 0$.
Budujemy przedział ufności dla parametru μ postaci

$$[X_{3:10}, X_{7:10}],$$

gdzie $X_{k:10}$ oznacza *k*-tą statystykę pozycyjną z próby $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$.
Wtedy prawdopodobieństwo $P_{\mu,\sigma}(\mu \in [X_{3:10}, X_{7:10}])$ jest równe

(A) $\frac{111}{128}$

(B) $\frac{112}{128}$

(C) $\frac{114}{128}$

(D) $\frac{99}{128}$

(E) $\frac{100}{128}$

Zadanie 8

Niech (X, Y) będzie dwuwymiarową zmienną losową z rozkładu o gęstości

$$p(x, y) = \begin{cases} 2x & \text{gdy } x \in (0,1) \wedge y \in (0,1) \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Niech $U = X + Y$ i $V = X - Y$. Wtedy $E\left(U \mid V = \frac{1}{3}\right)$ jest równa

(A) $\frac{10}{9}$

(B) 1

(C) $\frac{8}{9}$

(D) $\frac{7}{18}$

(E) $\frac{15}{18}$

Zadanie 9

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o identycznym rozkładzie Weibulla o gęstości

$$f_\theta(x) = \begin{cases} 2\theta x \exp\left(-\theta x^2\right) & \text{gdy } x \in (0,+\infty) \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Testem jednostajnie najmocniejszym na poziomie istotności 0,05 weryfikujemy hipotezę $H_0 : \theta \le 2$ przy alternatywie $H_1 : \theta > 2$. Niech $F_k(x)$ oznacza dystrybuantę rozkładu chi-kwadrat z k stopniami swobody w punkcie *x*.

Moc tego testu przy alternatywie $H_1 : \theta = 6$ jest równa

(A) $1 - F_{10}(6{,}1023)$

(B) $1 - F_{20}(10{,}4701)$

(C) $F_{10}(11{,}8209)$

(D) $F_{20}(32{,}5524)$

(E) $F_{20}(10{,}8508)$

Zadanie 10

Załóżmy, że $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie jednostajnym na przedziale [0; 1], zaś N jest zmienną losową o rozkładzie Poissona z wartością oczekiwaną 2, niezależną od zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$. Niech

$$Y_N = \begin{cases} \min\{X_1, X_2, \ldots, X_N\} & \text{gdy} \quad N > 0 \\ 0 & \text{gdy} \quad N = 0, \end{cases}$$

$$Z_N = \begin{cases} \max\{X_1, X_2, \ldots, X_N\} & \text{gdy} \quad N > 0 \\ 0 & \text{gdy} \quad N = 0. \end{cases}$$

Obliczyć $E(Z_N - Y_N)$.

(A) $2e^{-2} + 1$

(B) $2e^{-2} + 2$

(C) $4e^{-2}$

(D) e^{-2}

(E) $2e^{-2}$

Egzamin dla Aktuariuszy z 15 czerwca 2015 r.

Prawdopodobieństwo i Statystyka

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : ....

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	C	
2	B	
3	C	
4	B	
5	D	
6	E	
7	D	
8	A	
9	D	
10	E	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.
♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.