

Zadanie 1

Rozważamy model regresji liniowej postaci $Y_i = a + bx_i + \varepsilon_i$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, gdzie b jest nieznanym parametrem rzeczywistym, $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = x_5 = 3$, a ε_i są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie normalnym o wartości oczekiwanej 0 i nieznannej wariancji $\sigma^2 > 0$.

Hipotezę $H_0 : b = 0$ przy alternatywie $H_1 : b \neq 0$ weryfikujemy testem o obszarze

krytycznym postaci $\left\{ \left| \frac{\hat{b}}{\hat{\sigma}} \right| > c \right\}$, gdzie \hat{b} i $\hat{\sigma}$ są estymatorami największej

wiarogodności parametrów b i σ , a stała c dobrana jest tak, aby test miał rozmiar 0,05. Stała c jest równa

- A) 4,108
- (B) 0,919
- (C) 1,792
- (D) 2,054
- (E) 1,591

Zadanie 2

Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi każda z rozkładu wykładniczego o wartości oczekiwanej 1.

Niech $U = 2X + Y$ i $V = X - 2Y$.

Wtedy prawdopodobieństwo $P(U \in (0,5) \wedge V \in (0,5))$ jest równe

(A) $\frac{1}{3} - 2e^{-2,5} + \frac{5}{3}e^{-3}$

(B) $\frac{5}{6} - \frac{5}{2}e^{-2} + \frac{5}{3}e^{-3}$

(C) $1 - e^{-2,5} + e^{-3}$

(D) $1 - 2e^{-3} + e^{-6}$

(E) $\frac{1}{3} - e^{-2} + e^{-3}$

Zadanie 3

Rozważmy następujące zagadnienie testowania hipotez statystycznych. Dysponujemy próbką X_1, \dots, X_n z rozkładu normalnego o nieznannej średniej μ i znanej wariancji równej 9. Przeprowadzamy najmocniejszy test hipotezy $H_0: \mu = 0$ przeciwko alternatywie $H_1: \mu = 2$ na poziomie istotności $\alpha = 1/2$. Niech β_n oznacza prawdopodobieństwo błędu drugiego rodzaju, dla rozmiaru próbki n .

Wybierz poprawne stwierdzenie:

(A) $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n n = 1$

(B) $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n \sqrt{2\pi n} = 1$

(C) $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n \exp\left(\frac{2n}{9}\right) \sqrt{2\pi} = 1$

(D) $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n \exp\left(\frac{2n}{9}\right) \frac{2\sqrt{2\pi n}}{3} = 1$

(E) $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n \exp\left(\frac{2n}{9}\right) \frac{3\sqrt{n}}{2\sqrt{2\pi}} = 1$

Zadanie 4

Na podstawie próby losowej X_1, \dots, X_n , gdzie X_i , $i = 1, \dots, n$, są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na przedziale $(0, \theta)$ i $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem, zbudowano przedział ufności dla parametru θ na poziomie ufności $1 - \alpha$ postaci

$$[T_X, aT_X],$$

gdzie T_X jest estymatorem największej wiarygodności parametru θ na podstawie próby X_1, \dots, X_n .

Następnie uzyskano niezależnie drugą próbę losową Y_1, \dots, Y_m z tego samego rozkładu i zbudowano przedział ufności dla parametru θ na poziomie ufności $1 - \alpha$ postaci

$$[T_{XY}, bT_{XY}],$$

gdzie T_{XY} jest estymatorem największej wiarygodności parametru θ na podstawie próby $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m$.

Oblicz prawdopodobieństwo, że tak utworzone przedziały będą rozłączne.

(A) 0

(B) $\frac{m\alpha}{m+n}$

(C) $\frac{n\alpha}{m+n}$

(D) $\alpha \left(1 - \frac{m\alpha}{m+n} \alpha^{m/n} \right)$

(E) $\alpha \left(1 - \frac{n\alpha}{m+n} \alpha^{m/n} \right)$

Zadanie 5

Niech $Z_1, Z_2, \dots, Z_n, \dots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie Pareto o gęstości

$$p_{\lambda, \theta}(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\theta}{(x + \lambda)^{\theta+1}} & \text{dla } x > 0 \\ 0 & \text{dla } x \leq 0, \end{cases}$$

gdzie $\theta > 1$, $\lambda > 0$ są ustalonymi liczbami. Niech N będzie zmienną losową niezależną od Z_1, \dots, Z_n, \dots , o rozkładzie geometrycznym

$$P(N = n) = (1 - q)q^{n-1} \quad \text{gd } n = 1, 2, 3, \dots,$$

gdzie $q \in (0, 1)$ jest ustaloną liczbą.

Wyznaczyć $E(Z_1 + Z_2 + \dots + Z_N \mid \min(Z_1, Z_2, \dots, Z_N) = t)$, gdzie t jest ustaloną liczbą większą od 0.

(A) $\frac{t}{1 - q} + \frac{\lambda + t}{\theta - 1}$

(B) $t + \frac{q(\lambda + t)}{(1 - q)(\theta - 1)}$

(C) $\frac{\lambda q + \theta t - (1 - q)t}{(\theta - 1)(1 - q)}$

(D) $\frac{\lambda + \theta t}{(\theta - 1)(1 - q)}$

(E) $\frac{\lambda q + (\theta - 1)t}{(\theta - 1)(1 - q)}$.

Zadanie 6

Niech X będzie zmienną losową o funkcji gęstości

$$f_{\theta}(x) = \begin{cases} \frac{\theta - |x|}{\theta^2} & \text{gdy } |x| < \theta \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Na podstawie pojedynczej obserwacji weryfikujemy hipotezę $H_0 : \theta = 1$ przy alternatywie $H_1 : \theta \neq 1$ testem opartym na ilorazie wiarygodności na poziomie istotności 0,1.

Moc testu przy alternatywie $\theta = 2$ jest równa

- (A) 0,352
- (B) 0,280
- (C) 0,291
- (D) 0,325
- (E) 0,303

Zadanie 7

Rozważamy ciąg niezależnych dwuwymiarowych zmiennych losowych $(X_n, Y_n)_{n=1}^{+\infty}$, gdzie (X_n, Y_n) mają rozkłady jednostajne na zbiorze $[-2, 2] \times [-2, 2]$.

Niech

$$S_n = (S_{n,1}, S_{n,2}) = \left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n Y_i \right) \quad \text{i} \quad |S_n| = \sqrt{S_{n,1}^2 + S_{n,2}^2}.$$

Stałą c dobrano tak, by

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|S_n| < c\sqrt{n}) = 0,95.$$

Stała c jest równa

- (A) 2,063
- (B) 2,826
- (C) 1,413
- (D) 5,992
- (E) 3,842

Zadanie 8

Niech $X_1, X_2, \dots, X_n, X_{n+1}$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie jednostajnym na przedziale $(0, \theta)$. Parametr $\theta > 0$ jest nieznanym i jest realizacją zmiennej losowej o rozkładzie o gęstości

$$p(\theta) = \begin{cases} \frac{4}{\theta^5} & \text{gdy } \theta > 1 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Wyznaczamy predyktor bayesowski \hat{X}_{n+1} zmiennej X_{n+1} w oparciu o próbę X_1, X_2, \dots, X_n przy kwadratowej funkcji straty. Wartość oczekiwana tego predyktora czyli wielkość $E(\hat{X}_{n+1} | \theta)$ jest równa

(A) $\frac{\theta}{2} - \frac{n+4}{2(n+3)n\theta^n}$

(B) $\frac{\theta}{2} + \frac{n+4}{2(n+3)n\theta^n}$

(C) $\frac{(n+4)n\theta}{2(n+3)(n+1)} + \frac{n+4}{2(n+3)(n+1)\theta^n}$

(D) $\frac{(n+4)n\theta}{2(n+3)(n+1)}$

(E) $\frac{(n+4)\theta}{2(n+3)} + \frac{n+4}{2(n+3)(n+1)\theta^n}$

Zadanie 9

Rzucamy czterema symetrycznymi monetami. Następnie rzucamy ponownie tymi monetami, na których nie wypadły „orły”. W trzeciej rundzie rzucamy tymi monetami, na których do tej pory nie wypadły „orły”.

Oblicz prawdopodobieństwo, że po trzech rundach na wszystkich monetach będą „orły” (wybierz najbliższą wartość).

- (A) 0,500
- (B) 0,234
- (C) 0,456
- (D) 0,117
- (E) 0,586

Zadanie 10

Niech A i C będą zdarzeniami niezależnymi oraz $P(A) = \frac{1}{3}$ i $P(A \cup C) = \frac{7}{9}$. Niech

$$P(B|A) = P(B|C) = P(B|A \cap C) = \frac{1}{2} \text{ i } P(B'|A' \cap C') = \frac{3}{4}.$$

Wtedy $P(A|B)$ jest równe

(A) $\frac{3}{4}$

(B) $\frac{2}{3}$

(C) $\frac{1}{2}$

(D) $\frac{3}{7}$

(E) $\frac{3}{8}$

Egzamin dla Aktuariuszy z 23 marca 2015 r.**Prawdopodobieństwo i Statystyka****Arkusz odpowiedzi***

Imię i nazwisko :

Pesel

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja [♦]
1	D	
2	A	
3	D	
4	B	
5	C	
6	D	
7	B	
8	C	
9	E	
10	E	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.