

**Zadanie 1**

Zakładając, że zmienne losowe  $X_1, X_2, \dots, X_{16}$  są niezależne i mają rozkłady normalne  $X_i \sim N(m\sqrt{i}, i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 16$ , zbudowano test jednostajnie najmocniejszy dla weryfikacji hipotezy  $H_0 : m = 0$  przy alternatywie  $H_1 : m > 0$  na poziomie istotności 0,05.

W rzeczywistości okazało się, że wektor  $(X_1, X_2, \dots, X_{16})$  ma rozkład normalny taki, że  $EX_i = m\sqrt{i}$ ,  $VarX_i = i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 16$ , oraz współczynnik korelacji

$$\rho(X_i, X_j) = \begin{cases} 0,5 & \text{gdy } |i - j| = 1 \\ 1 & \text{gdy } i = j \\ 0 & \text{w pp} \end{cases} .$$

Wyznaczyć rzeczywisty rozmiar testu.

- (A) 0,09
- (B) 0,12
- (C) 0,21
- (D) 0,17
- (E) 0,02

**Zadanie 2**

Założmy, że  $X_1, \dots, X_n, \dots$  są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie wykładniczym i  $EX_i = \frac{1}{2}$ . Niech  $T_0 = 0$  i  $T_n = \sum_{i=1}^n X_i$  dla  $n = 1, 2, \dots$

Niech  $Y$  będzie zmienną losową niezależną od zmiennych  $X_1, \dots, X_n, \dots$ , o rozkładzie gamma o gęstości

$$p(x) = \begin{cases} 32x^2 \exp(-4x) & \text{gdy } x > 0 \\ 0 & \text{gdy } x \leq 0 \end{cases}.$$

Niech

$$N = \max\{n \geq 0 : T_n \leq Y\}.$$

Podać rozkład prawdopodobieństwa zmiennej  $N$ .

(A)  $P(N = n) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2) \left(\frac{8}{27}\right) \left(\frac{1}{3}\right)^n$  dla  $n = 0, 1, 2, \dots$

(B)  $P(N = n) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2) \left(\frac{1}{27}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^n$  dla  $n = 0, 1, 2, \dots$

(C)  $P(N = 0) = \frac{8}{27}$ ,  $P(N = n) = \frac{19}{81} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$  dla  $n = 1, 2, \dots$

(D)  $P(N = n) = \exp\left(-\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{1}{n!}$  dla  $n = 0, 1, 2, \dots$

(E)  $P(N = n) = \exp(-2) \frac{2^n}{n!}$  dla  $n = 0, 1, 2, \dots$

**Zadanie 3**

Niech  $X$  będzie pojedynczą obserwacją z rozkładu o gęstości

$$p_{\theta}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^2}(\theta - |x|) & \text{gdy } x \in [-\theta, \theta] \\ 0 & \text{gdy } x \notin [-\theta, \theta], \end{cases}$$

gdzie  $\theta > 0$  jest nieznanym parametrem. Weryfikujemy hipotezę  $H_0: \theta = 1$  przy alternatywie  $H_1: \theta \neq 1$  za pomocą testu opartego na ilorazie wiarygodności na poziomie istotności 0,20. Moc tego testu przy alternatywie  $\theta = 4$  jest równa

- (A) 0,80
- (B) 0,74
- (C) 0,65
- (D) 0,40
- (E) 0,37

**Zadanie 4**

Niech  $X$  i  $Y$  będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie wykładniczym o wartości oczekiwanej 1.

Niech  $U = -\ln\left(\frac{X}{Y}\right)$ . Wtedy

(A) zmienne  $U$  i  $Y$  są niezależne

(B) funkcja gęstości rozkładu brzegowego zmiennej  $U$  wyraża się wzorem

$$g(u) = \frac{e^{-u}}{(1+e^{-u})^2} \text{ dla } u \in \mathbb{R}$$

(C)  $P(U > 0) = \frac{1}{3}$

(D)  $E(Y | U = 1) = \frac{e}{1+e}$

(E) funkcja gęstości rozkładu brzegowego zmiennej  $U$  wyraża się wzorem

$$g(u) = \frac{2e^u}{(1+e^u)^2} \text{ dla } u > 0$$

**Zadanie 5**

Zmienne losowe  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  są niezależne o tym samym rozkładzie jednostajnym na przedziale  $(0,1)$ , a zmienna losowa  $N$  ma rozkład postaci

$$P(N = n) = e^{-2} \frac{2^{n-1}}{(n-1)!} \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

Zmienne  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  i  $N$  są niezależne.

Niech  $M_N = \max\{X_1, X_2, \dots, X_N\}$  i  $z \in (0,1)$ . Wtedy  $E(M_N | X_1 = z)$  jest równa

(A)  $\frac{1 - 2z + (2z + 1)e^{2(z-1)}}{2}$

(B)  $1 - \frac{1 - e^{z-1}}{e^2}$

(C)  $1 - \frac{1 - e^{2(z-1)}}{e^2}$

(D)  $\frac{e^{2(z-1)}}{2}$

(E)  $1 - \frac{1 - e^{2(z-1)}}{2}$

**Zadanie 6**

Niech  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ ,  $I_1, I_2, \dots, I_n, \dots, N$  będą niezależnymi zmiennymi losowymi. Zmienne  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  mają rozkład o wartości oczekiwanej 2 i wariancji 1. Zmienne  $I_1, I_2, \dots, I_n, \dots$  mają rozkład jednostajny na przedziale  $(0,1)$ . Zmienna  $N$  ma

rozkład ujemny dwumianowy  $P(N = n) = \frac{\Gamma(2+n)}{n!} \left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^n$  dla  $n = 0, 1, 2, \dots$

Niech  $S_N = \begin{cases} 0 & \text{gdy } N = 0 \\ \sum_{i=1}^N X_i & \text{gdy } N > 0 \end{cases}$  i  $Z_N = \begin{cases} 0 & \text{gdy } N = 0 \\ \sum_{i=1}^N I_i X_i & \text{gdy } N > 0 \end{cases}$ .

Wtedy współczynnik kowariancji  $Cov(S_N, Z_N)$  jest równy

(A)  $\frac{19}{6}$

(B)  $\frac{1}{3}$

(C)  $\frac{16}{9}$

(D)  $\frac{19}{9}$

(E)  $\frac{17}{18}$

**Zadanie 7**

Niech  $X_1, X_2, \dots, X_n, X_{n+1}$  będą zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie wykładniczym o gęstości

$$f_{\theta}(x) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x} & \text{gdy } x > 0 \\ 0 & \text{gdy } x \leq 0 \end{cases}$$

gdzie  $\theta > 0$  jest nieznanym parametrem. Zmienne losowe  $X_1, X_2, \dots, X_n, X_{n+1}$  są warunkowo niezależne przy danym  $\theta$ . Załóżmy, że rozkład a priori parametru  $\theta$  jest rozkładem gamma o gęstości

$$p(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{6} \beta^4 \theta^3 \exp(-\beta\theta) & \text{gdy } \theta > 0 \\ 0 & \text{gdy } \theta \leq 0 \end{cases}.$$

Na podstawie próby losowej  $X_1, X_2, \dots, X_n$  wyznaczamy predyktor bayesowski  $\hat{X}_{n+1}$  zmiennej  $X_{n+1}$  przy kwadratowej funkcji straty.

Wariancja otrzymanego predyktora jest równa

(A)  $\frac{\beta^2 n}{18(n+3)}$

(B)  $\frac{\beta^2 n}{6(n+3)^2}$

(C)  $\frac{\beta^2 n^2}{18(n+3)^2}$

(D)  $\frac{\beta^2 n}{12(n+4)^2}$

(E)  $\frac{\beta^2 n}{48(n+4)}$

**Zadanie 8**

Niech  $X_1, \dots, X_n, X_{n+1}, \dots, X_{2n}$  będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu normalnego  $N(\mu, \sigma^2)$ , gdzie oba parametry są nieznanne. Bezpośrednio dostępne są tylko obserwacje  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , ale dodatkowo znamy średnią  $\bar{X}_{2n} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} X_i$ .

Budujemy estymator parametru  $\sigma^2$  postaci  $S^2 = a \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_{2n})^2$ ,

gdzie stała  $a$  dobrana jest tak, by statystyka  $S^2 = a \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_{2n})^2$  była nieobciążonym

estymatorem wariancji  $\sigma^2$ .

Interesuje nas względny błąd estymacji

$$R = \frac{S^2 - \sigma^2}{\sigma^2}.$$

Wartość oczekiwana  $E(R^2)$  jest równa

(A)  $\frac{2(2n-1)}{n^2}$

(B)  $\frac{2(4n-3)}{n^2}$

(C)  $\frac{2}{2n-1}$

(D)  $\frac{2(4n-3)}{(2n-1)^2}$

(E)  $\frac{4n-3}{2(2n-1)^2}$



**Zadanie 9**

Niech  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  będą niezależnymi zmiennymi losowymi, przy czym zmienna  $Y_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , ma rozkład logarymiczno-normalny  $LN(bx_i, 1)$ , gdzie  $x_1, x_2, \dots, x_n$  są znanymi liczbami, a  $b$  jest nieznanym parametrem. Załóżmy, że  $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 4$ .

Niech  $\hat{b}$  będzie estymatorem największej wiarogodności parametru  $b$ , a  $\hat{g} = \exp(2\hat{b})$  estymatorem funkcji  $g(b) = \exp(2b)$ .

Wtedy obciążenie estymatora  $\hat{g}$

$$E_b \hat{g} - g(b)$$

jest równe

- (A) 0
- (B)  $e^{2b}(\sqrt{e} - 1)$
- (C)  $e^{2b}(e^2 - 1)$
- (D)  $e^{2b}(e^4 - 1)$
- (E)  $e^{2b}(e - 1)$

**Zadanie 10**

Rzucamy trzema sześciennymi kostkami do gry. Następnie rzucamy ponownie tymi kostkami, na których nie wypadły „jedyńki”. W trzeciej rundzie rzucamy tymi kostkami, na których do tej pory nie wypadły „jedyńki”.

Oblicz prawdopodobieństwo, że po co najwyżej trzech rundach na wszystkich kostkach będą „jedyńki” (wybierz najbliższą wartość).

- (A) 0,021
- (B) 0,050
- (C) 0,026
- (D) 0,017
- (E) 0,075

**Egzamin dla Aktuariuszy z 17 czerwca 2013 r.****Prawdopodobieństwo i Statystyka****Arkusz odpowiedzi\***

Imię i nazwisko : .....

Pesel .....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja ♦
1	B	
2	A	
3	C	
4	B	
5	E	
6	D	
7	A	
8	D	
9	B	
10	E	

---

\* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.