

**Zadanie 1**

W urnie znajdują się kule, z których każda jest oznaczona jedną z liter alfabetu:

- 10 kul oznaczonych literą A,
- 20 kul oznaczonych literą B,
- 30 kul oznaczonych literą C,
- $x$  kul oznaczonych innymi literami alfabetu.

Losujemy *bez zwracania* 9 kul z urny. Zmienne losowe  $N_A, N_B, N_C$  oznaczają, odpowiednio, liczbę wylosowanych kul z literami A,B,C.

Jakie musi być  $x$ , aby zmienne losowe  $N_A + N_B$  oraz  $N_B + N_C$  były *nieskorelowane*?

(A)  $x = 20$

(B)  $x = 24$

(C)  $x = 15$

(D)  $x = 12$

(E)  $x = 9$

**Zadanie 2**

Niech  $X_1, X_2, X_3, X_4$  będą niezależnymi zmiennymi losowymi, przy czym zmienna losowa  $X_i$  ma rozkład o wartości oczekiwanej  $m$  i wariancji  $im^2$ ,  $i=1,2,3,4$ , gdzie  $m \neq 0$  jest nieznanym parametrem. Niech  $\hat{m}$  oznacza estymator parametru  $m$  minimalizujący błąd średniokwadratowy w klasie estymatorów postaci

$$a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + a_4X_4,$$

gdzie współczynniki  $a_i \in \mathbb{R}$ ,  $i=1,2,3,4$ .

Wtedy  $E_m(\hat{m} - m)^2$  jest równe

(A)  $\frac{5}{8}m^2$

(B)  $\frac{12}{25}m^2$

(C)  $\frac{1}{2}m^2$

(D)  $\frac{3}{8}m^2$

(E)  $\frac{12}{37}m^2$

**Zadanie 3**

Zmienna losowa  $X$  ma rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej 0,5, a zmienna losowa  $Y$  rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej 1. Obie zmienne są niezależne. Oblicz medianę rozkładu warunkowego  $Med(X | X + Y = 3)$ .

(A)  $\ln\left(\frac{1+e^{1.5}}{2}\right)$

(B)  $-\ln\left(\frac{1+e^{-2}}{2}\right)$

(C)  $2\ln\left(\frac{1+e^{1.5}}{2}\right)$

(D)  $-\ln\left(\frac{1+e^{-3}}{2}\right)$

(E)  $\frac{1}{2}$

**Zadanie 4**

Dysponujemy dwiema urnami. W urnie I mamy jedną kulę białą i jedną czarną, w urnie II mamy dwie kule białe i jedną czarną. Powtarzamy  $n$  razy eksperyment polegający na tym, że losujemy jedną kulę z urny I, nie oglądając jej wkładamy ją do urny II, następnie losujemy jedną kulę z urny II i nie oglądając jej wkładamy ją do urny I. Niech  $X_n$  oznacza zmienną losową równą liczbie kul białych w urnie I po  $n$  doświadczeniach. Wtedy  $\lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n X_{n+1})$  jest równa

(A)  $\frac{63}{40}$

(B)  $\frac{37}{24}$

(C)  $\frac{11}{8}$

(D)  $\frac{23}{24}$

(E) 1

**Zadanie 5**

Niech  $X_1, X_2, \dots, X_{m+n}$  będą niezależnymi zmiennymi losowymi, przy czym zmienne losowe  $X_i$   $i = 1, 2, \dots, m$  mają rozkład Weibulla o gęstości

$$f_{\theta}(x) = \begin{cases} \frac{\theta}{2\sqrt{x}} e^{-\theta\sqrt{x}} & \text{gdy } x > 0 \\ 0 & \text{gdy } x \leq 0 \end{cases}$$

a  $X_i$ ,  $i = m+1, m+2, \dots, m+n$  są zmiennymi losowymi o rozkładzie Weibulla o gęstości

$$g_{\theta}(x) = \begin{cases} \frac{\theta}{\sqrt{x}} e^{-2\theta\sqrt{x}} & \text{gdy } x > 0 \\ 0 & \text{gdy } x \leq 0 \end{cases},$$

gdzie  $\theta > 0$  jest nieznanym parametrem. Na podstawie próby losowej

$X_1, X_2, \dots, X_{m+n}$  testem jednostajnie najmocniejszym, na poziomie istotności 0,05, weryfikujemy hipotezę  $H_0 : \theta = 1$  przy alternatywie  $H_0 : \theta > 1$ . Przy  $m = 6$  i  $n = 4$  moc testu dla alternatywy  $\theta = 2$  jest równa

- (A) 0,8915
- (B) 0,6430
- (C) 0,7351
- (D) 0,9994
- (E) 0,4584

**Zadanie 6**

Niech  $X_1$  będzie zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na przedziale  $(0,1)$ ,  $X_2$  zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na przedziale  $(0, X_1)$ ,  $X_3$  zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na przedziale  $(0, X_2)$  i tak dalej. Niech  $N$  oznacza zmienną losową, taką że

$$P(N = n) = \frac{\lambda^n}{n!(e^\lambda - 1)} \quad \text{gdy } n = 1, 2, 3, \dots,$$

gdzie  $\lambda > 0$  jest ustaloną liczbą. Zmienna  $N$  jest niezależna od zmiennych  $X_1, X_2, X_3, \dots$

Wtedy  $E(N!X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_N)$  jest równa

- (A)  $\frac{e^\lambda - 1 - \lambda}{\lambda(e^\lambda - 1)}$
- (B)  $e^\lambda + 1$
- (C)  $\frac{\lambda(e^\lambda - 1 - \lambda)}{e^\lambda - 1}$
- (D) 1
- (E)  $\frac{e^\lambda(1 + \lambda)}{\lambda(e^\lambda - 1)}$

**Zadanie 7**

Zmienna losowa  $(X, Y, Z)$  ma rozkład normalny z wartością oczekiwaną  $EX = 0$ ,  $EY = EZ = 1$  i macierzą kowariancji

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Obliczyć  $Var(X(Y + Z))$ .

- (A) 12
- (B) 13
- (C) 16
- (D) 17
- (E) 18

**Zadanie 8**

Rozważamy proces autoregresji postaci

$$X_t = \rho X_{t-1} + \varepsilon_t \quad t=1,2,\dots,T,$$

gdzie zmienne  $\varepsilon_t$  są niezależne o tym samym rozkładzie normalnym o wartości oczekiwanej 0 i wariancji 1,  $X_0$  jest ustalonym znanym parametrem,  $\rho \in R$  jest nieznanym parametrem. Zakładamy, że  $\rho$  ma rozkład a priori równy rozkładowi normalnemu o wartości oczekiwanej 0,5 i wariancji 0,25. Zmienne  $\rho$  i  $\varepsilon_t$ ,  $t=1,2,\dots,T$  są niezależne. Wyznacz estymator bayesowski parametru  $\rho$  na podstawie próby  $X_1, X_2, \dots, X_T$  przy kwadratowej funkcji straty.

$$(A) \frac{\sum_{t=1}^T X_t X_{t-1} + 1}{\sum_{t=1}^T X_{t-1}^2 + 2}$$

$$(B) \frac{\sum_{t=1}^T X_t X_{t-1} + 2}{\sum_{t=1}^T X_{t-1}^2 + 4}$$

$$(C) \frac{\sum_{t=1}^T X_t X_{t-1} + 1}{\sum_{t=1}^T X_t^2 + 2}$$

$$(D) \frac{\sum_{t=1}^T X_t X_{t-1} + 2}{\sum_{t=1}^T X_t^2 + 4}$$

$$(E) \frac{\sum_{t=1}^T X_t X_{t-1} + 0,5}{\sum_{t=1}^T X_{t-1}^2 + 0,25}$$



**Zadanie 9**

Niech  $X_1, X_2, \dots, X_n$  będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie Laplace'a o gęstości

$$f_{\theta}(x) = \exp(-2|x - \theta|) \quad \text{dla } x \in R,$$

gdzie  $\theta$  jest nieznanym parametrem rzeczywistym. Rozważamy estymator  $\hat{\theta}$  parametru  $\theta$  równy medianie z próby  $X_1, X_2, \dots, X_n$

$$\hat{\theta} = X_{[0,5n]n}.$$

W oparciu o ten estymator budujemy przedział ufności dla parametru  $\theta$  postaci

$$(\hat{\theta} - a, \hat{\theta} + a),$$

gdzie  $a$  dobrane jest tak, aby dla każdego  $\theta \in R$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_{\theta}(\theta \in (\hat{\theta} - a, \hat{\theta} + a)) = 0,95.$$

Wtedy  $a$  jest równe

- (A)  $\frac{3,28}{\sqrt{n}}$
- (B)  $\frac{0,82}{\sqrt{n}}$
- (C)  $\frac{0,98}{\sqrt{n}}$
- (D)  $\frac{1,96}{\sqrt{n}}$
- (E)  $\frac{3,92}{\sqrt{n}}$

**Zadanie 10**

Niech  $N$  będzie zmienną losową o rozkładzie ujemnym dwumianowym takim, że

$$P(N = n) = (n+1) \left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^n \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots,$$

zaś  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  będą zmiennymi losowymi niezależnymi od  $N$  i od siebie nawzajem. Zakładamy, że każda ze zmiennych  $X_i$  ma rozkład Bernoulli'ego:

$$P(X_i = 1) = p \text{ i } P(X_i = 0) = q, \text{ gdzie } p + q = 1, 0 < p < 1.$$

$$\text{Niech } N_1 = \begin{cases} \sum_{i=1}^N X_i & \text{gdym } N > 0 \\ 0 & \text{gdym } N = 0 \end{cases} \quad \text{i } N_0 = N - N_1.$$

Wtedy  $E\left[\frac{N_1}{N_0 + 1}\right]$  jest równa

(A)  $\frac{7p}{16q}$

(B)  $\frac{p}{q}$

(C)  $\frac{p}{q} \left[ 1 - \left( \frac{3}{4-q} \right)^2 \right]$

(D)  $\frac{p}{q} \left[ 1 - \left( \frac{3}{4-p} \right)^2 \right]$

(E)  $\frac{2p}{3(q+1)}$

**Egzamin dla Aktuariuszy z 25 marca 2013 r.****Prawdopodobieństwo i Statystyka****Arkusz odpowiedzi\***

Imię i nazwisko : .....

Pesel .....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja ♦
1	C	
2	E	
3	D	
4	A	
5	B	
6	A	
7	D	
8	B	
9	C	
10	D	

---

\* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.