Zadanie 1

Każda ze zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots, X_9$ ma rozkład normalny z nieznaną wartością oczekiwaną m_1 i wariancją 1, a każda ze zmiennych losowych $Y_1, Y_2, \ldots, Y_9$ rozkład normalny z nieznaną wartością oczekiwaną m_2 i wariancją 4. Założono, że wszystkie zmienne losowe są niezależne i wyznaczono, przy tych założeniach, test oparty na ilorazie wiarogodności dla testowania hipotezy $H_0 : m_1 = m_2$ przy alternatywie $H_1 : m_1 \neq m_2$ na poziomie istotności 0,05.
W rzeczywistości założenie to nie jest spełnione:

- co prawda pary zmiennych $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots, (X_n, Y_n)$ są niezależne i mają rozkłady normalne, ale
- dla $i = 1,2,\ldots,6$, X_i, Y_i są zależne i współczynnik korelacji $Corr(X_i, Y_i) = -\frac{1}{2}$.

Moc testu przy alternatywie $m_1 = m_2 + 1$ jest równa

(A) 0,390

(B) 0,293

(C) 0,235

(D) 0,610

(E) 0,710

Zadanie 2

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie logarytmiczno-normalnym z parametrami $\mu \in R$ i $\sigma > 0$. Niech T_n oznacza estymator największej wiarogodności wariancji V^2 w tym modelu w oparciu o próbę $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Niech $\mu = -0{,}5$ i $\sigma = 1$.
Wtedy

(A) $\lim_{n \to +\infty} P\left(\left|T_n - V^2\right|\sqrt{n} > 10{,}73\right) = 0{,}134$

(B) $\lim_{n \to +\infty} P\left(\left|T_n - V^2\right|\sqrt{n} > 10{,}73\right) = 0{,}069$

(C) $\lim_{n \to +\infty} P\left(\left|T_n - V^2\right|\sqrt{n} > 10{,}73\right) = 0{,}028$

(D) $\lim_{n \to +\infty} P\left(\left|T_n - V^2\right|\sqrt{n} > 10{,}73\right) = 0{,}056$

(E) $\lim_{n \to +\infty} P\left(\left|T_n - V^2\right|\sqrt{n} > 10{,}73\right) = 0{,}620$

Zadanie 3

Załóżmy, że dysponujemy pojedynczą obserwacją X z rozkładu Laplace'a o gęstości

$$f_{\mu,\lambda}(x)=\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x-\mu|},$$

gdzie $\lambda>0$ i $\mu\in R$ są parametrami.

Rozważmy zadanie testowania hipotezy

$$H_0:\mu=-1 \quad i \quad \lambda=0{,}5$$

przy alternatywie

$$H_1:\mu=0 \quad i \quad \lambda=1.$$

Obszar krytyczny najmocniejszego testu na poziomie istotności α jest postaci

$$K=\{x:x\in(b,2)\}.$$

Moc tego testu jest równa

(A) 0,623

(B) 0,649

(C) 0,676

(D) 0,865

(E) 0,585

Zadanie 4

Zmienna losowa *N* ma rozkład geometryczny

$$P(N=n)=p^n(1-p) \quad \text{dla} \quad n=0,1,2,\ldots,$$

gdzie $p\in(0,1)$ jest nieznanym parametrem. Rozważamy losową liczbę zmiennych losowych $X_1, X_2,..., X_N$, przy czym zmienne losowe $X_1, X_2,..., X_N$ są niezależne wzajemnie i niezależne od zmiennej losowej *N*. Każda ze zmiennych X_i ma rozkład o gęstości danej wzorem:

$$f_\theta(x)=\begin{cases}\frac{2}{\theta^2}x & \text{gdy } x\in(0,\theta] \\ 0 & \text{gdy } x\notin(0,\theta]\end{cases},$$

gdzie $\theta>0$ jest nieznanym parametrem.

Obserwujemy tylko te spośród zmiennych $X_1, X_2,..., X_N$, które są większe od 4. Nie wiemy ile jest pozostałych zmiennych ani jakie są ich wartości. Przypuśćmy, że zaobserwowaliśmy następujące wartości

5.6 5, 6, 7.4, 8, 6.2.

Na podstawie tych danych wyznaczono wartości estymatorów największej wiarogodności $\hat{\theta}$ i $\hat{p}$ parametrów θ i p. Otrzymano $\hat{p}$ równe

(A) $\frac{11}{12}$

(B) $\frac{6}{7}$

(C) $\frac{8}{9}$

(D) $\frac{12}{13}$

(E) $\frac{7}{8}$

Zadanie 5

Zmienna losowa (X,Y) ma rozkład prawdopodobieństwa o funkcji gęstości

$$f(x,y)=\begin{cases}8xy & \text{gdy } 0<y<x<1\\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku}\end{cases}.$$

Niech $U = X + Y$ i $V = X - Y$.

Wtedy $E\left(V \mid U = \frac{4}{3}\right)$ jest równa

(A) $\frac{3}{8}$

(B) $\frac{4}{11}$

(C) $\frac{1}{2}$

(D) $\frac{7}{22}$

(E) $\frac{1}{8}$

Zadanie 6

Z urny, w której są dwie kule białe i trzy czarne, wylosowano jedną kule a następnie wrzucono ją z powrotem dorzucając kulę w tym samym kolorze co wylosowana. Następnie z urny wylosowano 2 kule, wrzucono je z powrotem dorzucając dwie kule identyczne jak wylosowane. Następnie wylosowano 3 kule. Okazało się, że są to trzy kule białe. Oblicz prawdopodobieństwo, że w drugim losowaniu wylosowano kule różnych kolorów.

(A) $\frac{16}{29}$

(B) $\frac{44}{81}$

(C) $\frac{4}{7}$

(D) $\frac{3}{7}$

(E) $\frac{17}{30}$

Zadanie 7

Niech $X_1,...,X_{10},...,X_{30}$ będzie próbką losową z rozkładu normalnego $N(\mu,\sigma^2)$, z nieznanymi parametrami μ i σ^2. Niech

$$\overline{X}_{10} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} X_i, \quad \overline{X}_{30} = \frac{1}{30}\sum_{i=1}^{30} X_i,$$

$$S^2 = S_{10}^2 = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{10} (X_i - \overline{X}_{10})^2.$$

Skonstruowano przedział $[\overline{X}_{10} - aS, \overline{X}_{10} + aS]$ taki, że

$$P\left(\overline{X}_{30} \in [\overline{X}_{10} - aS, \overline{X}_{10} + aS]\right) = 0{,}95.$$

Liczba a jest równa

(A) 0,226

(B) 0,715

(C) 0,506

(D) 0,826

(E) 0,584

Zadanie 8

Niech $X_1,...,X_9$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie prawdopodobieństwa:

$$\Pr(X_i = 1) = 2/3 \text{ i } \Pr(X_i = -1) = 1/3.$$

Niech $S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$ dla $k = 1,2,...,9$.

Prawdopodobieństwo

$$P(S_9 = 3 \quad i \quad S_1 \le 5, S_2 \le 5, ..., S_9 \le 5)$$

jest równe

(A) 0,1445

(B) 0,2889

(C) 0,2699

(D) 0,2731

(E) 0,1350

Zadanie 9

Niech $X_1,\ldots,X_n,\ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu jednostajnego na przedziale [0,1]. Niech N będzie zmienną losową o rozkładzie ujemnym dwumianowym, niezależną od zmiennych $X_1,\ldots,X_n,\ldots$, o funkcji prawdopodobieństwa

$$P(N=n)=\frac{(n+2)(n+1)}{2}p^3(1-p)^n, \text{ dla } n=0,1,2,\ldots.$$

Niech

$$Y_N=\begin{cases}\min\{X_1,\ldots,X_N\} & \text{gdy } N>0\\ 0 & \text{gdy } N=0\end{cases} \quad \text{i} \quad Z_N=\begin{cases}\max\{X_1,\ldots,X_N\} & \text{gdy } N>0\\ 0 & \text{gdy } N=0\end{cases}.$$

Wyznacz $E(Y_N Z_N)$.

(A) $\frac{1-p^2}{2}$

(B) $\frac{p(2-p)}{2}$

(C) $\frac{p(1-p)}{2}$

(D) $\frac{p}{2}$

(E) $\frac{p(1-p^2)}{2}$

Zadanie 10

Niech Λ będzie zmienną losową o rozkładzie wykładniczym o wartości oczekiwanej równej 1. Niech N będzie zmienną losową, która warunkowo, przy $\Lambda = \lambda$, ma rozkład Poissona o wartości oczekiwanej λ.

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie gamma o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} 16xe^{-4x} & gdy \quad x > 0 \\ 0 & gdy \quad x \le 0 \end{cases}.$$

Zmienne losowe N i $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ są niezależne oraz zmienne losowe Λ i $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ są niezależne.

Niech

$$S_N = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} X_i & \text{gdy} \quad N > 0 \\ 0 & \text{gdy} \quad N = 0 \end{cases}$$

Wtedy $E(S_N - ES_N)^3$ jest równa

(A) $\frac{21}{16}$

(B) $\frac{9}{8}$

(C) $\frac{3}{8}$

(D) $\frac{19}{16}$

(E) $\frac{15}{16}$

Egzamin dla Aktuariuszy z 10 grudnia 2012 r.

Prawdopodobieństwo i Statystyka

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ : .... K L U C Z   O D P O W I E D Z I ....

~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	B	
2	A	
3	C	
4	C	
5	D	
6	A	
7	E	
8	C	
9	E	
10	D	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.